الجمهورية العربية السورية

وزارة السياحة

الرياضيات في العمليات الفندقية

الأول الثانوي المهني الفندقي

2021-2020

الفائِدةَ المُركبَّة
compound interest

نشاط فكري

اجتَمعَ مَالِك فُندق الدَاماروز ومَالِك فُندُق شِـــيراتُون بأحَد المُناسَـــبات فِي حَفل عَشاء ودَار حِوار بينَهمَا حَول أرباح فَنادقهُم ومَع أي مَصرف يَتعامل كلاً منهُم.

فقال مَالك فُندق الدَاماروز أنـهُ أودَع مَبلغ وقَدرهُ 100000 ل.س بفائِدةَ 6% فكَانَ رصيدهُ بَعد 3 سَنوات 101800 ل.س.

فاستَعربَ مَالِك فُندق شِيراتُون وقَال أنَا أودَعِت نَفس المَبلَغ فِي المَصرف وبنَفس الفائِدة ولكِن كَان رصِيدي بعدَ 3 سنَوات 101910 ل.س.

برأيكَ لمَاذا هَذا الاختِلاف بَينَ المَصرفين؟

أولاً: مفهوم الفائدة المركبة

استعرضنا بالبحث السابق مفهومَ الفائِدة البسيطَة وكيفيَة حِسابهَا وبَّينا أنَّها تُطبَّق في الآجل القَصيرة، أمَّا بالنسـبة للاسـتثمارات في الآجال الطَّويلة فإنَّنا نُطبَّق الفائدةَ المركَّبة، حيثُ يتم إضـافةُ الفوائد المترتَّبة في نهاية كلِ دورة مَالية عَلى المَبلغ الأصلي ليتكَّون مبلغ جديد.

أولاً: تعريف الفائدة المركبة

هي المردودُ المالي النَّاتج مِن اسـتثمَار مَبلغ مِن المَال خلالَ مدةً زمنيّة محدَّدة بمعدَّل فائِدة سـنوية مُعيَّنة بحيث يُضافُ هذا المَردُود إلى المَبلغ الأصلي فِي نهَاية كلَّ دَورة زمنية.

الرمُوز المُستخدمَة:

- قيمة المَبلغ الأصلي **C**
- المدَّةُ الزمنية **n**
- المعدَّل **i**
- الفائدةُ المركبَّة **I**
- الجُملة **C_n**

الجُملة بالفائِدة المُركبَّة:

يمكن إيجاد جملة المبلغ بالفائدة المركبَّة باستخدام القانون الآتي:

$$C_n = C\,(1+i)^n$$

لإيجادِ القِيم المُتعلّقة بالمِقدار $(1+i)^n$ يُمكِن اسـتخدَام الآلة الحَاسـبة أو باسـتخدامِ جَداول أعدَّت لذلك تُدعى جَداول الفائِدة المُركبَّة والتي تَختَلِف قِيمَتهَا بحَسب المُعدَّل والمدَّة كما يأتي:

جدول $(1+i)^n$

	0.0525	0.055	0.0575	0.06
0	1000000	1000000	1000000	1000000
1	1.052500	1.055000	1.057500	1.060000
2	1.107756	1.113025	1.118306	1.123600
3	1.165913	1.174241	1.182609	1.191016
4	1.227124	1.238825	1.250609	1.262477
5	1.291548	1.306960	1.322519	1.338226
6	1.359354	1.378843	1.398564	1.418519
7	1.430720	1.454679	1.478981	1.503630
8	1.505833	1.534687	1.564023	1.593848
9	1.584889	1.619094	1.653954	1.689479
10	1.668096	1.708144	1.749056	1.7900848

تطبيق:

ما جُملة مَبلغ قدَّرهُ 30000 ل.س استُثمِر لمُدَّة 7 سنوات بمعدَّل فائِدة مُركَّبة 6% سنوياً.

نستَخرج قِيمَة المِقدَّار من الجَدول $(1.06)^7 = 1.503630$

C= 30000 i= 6% n= 7 C_n=?

$$C_n = C(1+i)^n$$

$$C_n = 30000(1.06)^7$$

$$C_n = 30000\ (1.50363)$$

$$C_n = 45108.9$$

تطبيق:

لحسابِ جُملة مبلغ 100000 ل.س استثمرهُ فَادي في مصرفٍ يُعطي فائدة مركبة بمعدل 5% سنوياً ولمدة 5 سنوات.

C= 100000 i= 5% n= 5 C_n=?

$$C_n = C(1+i)^n$$

$$C_n = 100000(1.05)^5$$

$$C_n = 127628.15$$

تطبيق:

لإيجادِ مَبلغ استُثمَر مُنذ 10 سنوات بمعدَّل فَائِدة مُركبَّة 5% فأعطَى جُملة قدرُهَا 200000 ل.س

i= 5% n= 10 C_n=200000 C= ?

$$200000 = C(1.05)^{10}$$

$$C = \frac{200000}{(1.05)^{10}}$$

$$C = 122782.65$$

الفائدة المركّبة

ويُمكن إيجادُ الفائدة المركَّبة كما يلي:

$$C_n = C+I$$

$$I = Cn - C$$

$$I = C\ (1+i)^n - C$$

$$I = C\ [(1+i)^n - 1]$$

تطبيق:

لحســـاب الجُملة المركَّبة لمبلغ 200000 ل.س أودعَ بمصـــرف بفائدة مركبة معدّلها 9% ولمدَّة 5 سنوات

C= 200000 i= 9% n= 5 C_n=?.

$$C_n = C(1+i)^n$$

$$C_n = 200000\,(1.09)^5$$

$$C_n \approx 307725$$

ولحساب مقدار الفائدة

$$I = C_n - C$$

$$I = 307725 - 200000$$

$$I \approx 107725$$

طريقة ثانية:

$$I = C\,[(1+i)^n - 1]$$

$$I = 200000\,[(1.09)^5 - 1]$$

$$I \approx 107725$$

إضافة الفائدة أكثر من مرة في العام

عند إضافة الفائِدَة أكثَر مِن مَرة فِي العَام يكُون قَانُون الجُملَة المُستخدَم فِي هذهِ الحَالَة هُو:

$$C_n = C\,(1+\frac{i}{m})^{n\,m}$$

حيثُ m عددُ مرَّات إضافَة الفَائِدة

تطبيق:

لحسابِ رأس المَال النَاتِج لفُندقِ الشَهبَاء مِن تَوظِيف مَبلغ 3000000 ل.س فِي مصرِف بفائِدَة مُركَّبة مُعدَلهَا **9%** سَنوياً لمدَّة 10 سَنوات وتُضَاف الفَائِدة مَرتَين فِي العَام.

$C = 3000000$ $i = 9\%$ $n = 10$ $m = 2$ $C_n = ?$.

$$C_n = C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n\,m}$$

$$C_n = 3000000\left(1+\frac{0.09}{2}\right)^{10*2}$$

$$C_n = 3000000\,(1.045)^{20}$$

$$C_n = 7235142.075$$

وتُحسَب الفَوائِد النَّاتِجَة مِن هَذا التَّوظِيف

طريقةٌ أولى

$$I = C_n - C$$

$$I = 7235142.075 - 3000000$$

$$I = 4235142.075$$

طريقةٌ ثانية

$$I = C\left[1+\frac{i}{m}\right)^{n\,m} - 1]$$

$$I = 3000000\left[\left(1+\frac{0.09}{2}\right)^{10(2)} - 1\right]$$

$$I = 3000000\,[(1.045)^{20} - 1]$$

$$I = 4235142.075$$

تطبيق:

أودعَ فندق شـيراتون في مَصـرف مَبلغاً مَا بفائِدة مركَّبة معدَّلهَا 6% سَـنوياً لمُدَّة 5 سَـنوات فبلغَت الجُملَة 1346855 ل.س بفَرض أنَّ الفَائدَة تُضَاف كُلّ 3 أشَهُر.

أوجِد المَبلغ المُودَع.

$C_n = 1346855$ $i = 6\%$ $n = 5$ $m = \frac{12}{3} = 4$ $C = ?$

$$C_n = C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n\,m}$$

$$1346855 = C\left(1+\frac{0.06}{4}\right)^{5\,(4)}$$

$$1346855 = C\ (1.015)^{20}$$

$$C = \frac{1346855}{(1.015)^{20}}$$

$$C \approx 1000000$$

لإيجَاد الفَوائِد التي تحمَلهَا فُندق شِيراتون

$$I = C_n - C$$

$$I = 1346855 - 1000000$$

$$I = 346855$$

تطبيق:

لإيجاد الرصِيد المتكَون لمَبلغ 250000 ل.س كَان قَد استثمرهُ مَكتَب الشَرق للسِياحَة والسَفر مِن 10 سَنوات بمُعدَّل فائِدة مركَّبة 6% تُضاف الفائِدة كُل 4 أشُهر.

$$C= 250000 \qquad i= 6\% \qquad n= 10 \qquad m = 3 \qquad C_n=?$$

$$C_n = C\ (1+\frac{i}{m})^{n\,m}$$

$$C_n = 250000\,(1+\frac{0.06}{3})^{10\,(3)}$$

$$C_n \approx 45284$$

تطبيق:

لحسـاب رأسِ المَال المُتكَّون مِن اسـتثمَار مَبلغ 1500000 ل.س لمدَّة سـنتين بمعدَّل فائِدة مُركَّبة 6% وتُضَاف الفائدة كل شهرين.

$$C_n=?6 \qquad m = 2\% \qquad n= 6 \qquad i= 1500000C=$$

$$C_n = C\ (1+\frac{i}{m})^{n\,m}$$

$$C_n = 1500000\,(1+\frac{0.06}{6})^{2\,(6)}$$

$$C_n \approx 1690237$$

ولإيجَاد مِقدار الفَائِدة المُترتَّبة لـهَذا الاستِثمَار

$$I = C_n - C$$

$$I = 1690237 - 1500000$$

$$I \approx 190237$$

تطبيق:

استثمر مَطعم الربوة مَبلغ 2000000 ل.س بفائِدَة مُركبَة مُعدَّلها 6% سنوياً لمُدة 3 سَنوات عَلى أنْ تُضاف الفَائِدةَ بشكلٍ يَومِي.

ولإيجاد رصيد مطعم الربوة في نهايةِ السنَّة الأولى.

$$n = 3 \qquad m = 365 \qquad C_n = ? \qquad \% 6 = \qquad i2000000C =$$

$$C_n = C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n\,m}$$

$$C_n = 2000000\left(1+\frac{0.06}{365}\right)^{1(365)}$$

$$C_n \approx 2123662$$

ولإيجادِ رصيده في نهايةِ السَّنة الثَّانية

$$C_n = C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n\,m}$$

$$C_n = 2000000\left(1+\frac{0.06}{365}\right)^{2(365)}$$

$$C_n \approx 2254971$$

الرصيد في نهايةِ السَّنة الثَّالثة

$$C_n = C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n\,m}$$

$$C_n = 2000000\left(1+\frac{0.06}{365}\right)^{3(365)}$$

$$C_n \approx 2394400$$

المُعدَّل الحقيقي والمُعدَّل الإسميَ الفائدة أكثر

نتيجَة إضَافة الفائِدة أكثَر مِن مَرَّة بالعَامِ الواحدِ يحقَّق المُقرضُ مُعدَّل فائدةٍ فِعلية أعلَى مِن المُعدَّل السَنوي المُتفَقُ عليه.

حيث تُسمى المعدَّل السَّنوي المتفق عليه بالمعدَّل الإسميّ **I**

ونسمَّي المُعدَّل الفِعليّ بالمعدَّل الحَقيقي **I′**

ونَرمزُ لعَدد مرأَّت إضافةِ الفائدة **m**

ويُمكِن إيجَاد المُعدَّل الحَقيقي السَّنوي

$$I' = (1+\frac{i}{m})^m - 1$$

تطبيق:

لإيجاد المُعدَّل الحقيقي المُكافئ لمعدَّل اسميّ 6% سنوياً.

1- عند إضافةِ الفائِدة مَرتين بالعَام:

I = 6% m=2 i′= ?

$$I' = (1+\frac{i}{m})^m - 1$$

$$I' = (1+\frac{0.06}{2})^2 - 1$$

$$I' = 0.0609$$

$$I' = 6.09\%$$

2-عند إضافةِ الفائِدة كل 4 أشهر:

$$I = 6\% \quad m=\frac{12}{4} = 3 \quad i'= ?$$

$$I' = (1+\frac{i}{m})^m - 1$$

$$I' = (1+\frac{0.06}{3})^3 - 1$$

$$I' = 0.0612$$

$$I' \approx 6.12\%$$

3-عند إضافةِ الفائِدة شهرياً:

$I = 6\%$ $m=12$ $i' = ?$

$$I' = (1+\frac{i}{m})^m - 1$$

$$I' = (1+\frac{0.06}{12})^{12} - 1$$

$$I' = 0.06167$$

$$I' \approx 6.17\%$$

نتيجةٌ

يزدادُ المُعدل الحَقيقي كُلمَا ازداد عَدد مرَّات إضَافة الفَائِدة

تطبيق

أودعَ مَطعَم أليسار مَبلغ 1000000 ل.س فِي مصرفٍ، بمُعدَّل فائِدة 6% سَنوياً لمُدة 3 سَنوات لإيجادِ جُملة المَبلغ لكلّ من الحَالات الآتية:

1- الفائدةُ تُضاف مرَّة واحدة

$C= 1000000$ $i= 6\%$ $n=3$ $m=1$

$$C_n = C\,(1+i)^n$$

$$C_n = 1000000\,(1.06)^3$$

$$C_n \approx 1191016$$

2- الفائدةُ تُضاف مرَّتين

$C= 1000000$ $i= 6\%$ $n=3$ $m=2$

$$C_n = C\,(1+\frac{i}{m})^{n\,m}$$

$$C_n = 1000000\,(1+\frac{0.06}{2})^{3(2)}$$

$$C_n \approx 1194052$$

3- الفائدةُ تُضاف شهرياً

$C= 1000000$ $i= 6\%$ $n=3$ $m=12$

$$C_n = C\,(1+\frac{i}{m})^{n\,m}$$

$$C_n = 1000000\,(1+\frac{0.06}{2})^{3(12)}$$

$$C_n \approx 1196680$$

نتيجة

تزدادُ الجُملة كُلمَا ازداد عَدد مرَّات إضَافة الفَائِدة

ثالثاً: العلاقة بين الفائدة البسيطة والفائدة المركبة

تختلف قيمَة الفائِدة البسيطَة عن قيمةِ الفائِدة المركَّبة وذلك بحسابِ مدَّة الاستثمَار.

حيث نلاحظ الحالات الآتية:

- المدَّة $n=1$ سنة — الفائِدة البسيطَة= الفائدة المركَّبة
- المدَّة $n>1$ سنة — الفائِدة البسيطَة > الفائدة المركَّبة
- المدَّة $n<1$ سنة — الفائِدة البسيطَة < الفائدة المركَّبة

أ

الفائِدة البسيطَة = المبلغ × المعدَّل × المدة

$$I = C\,i\,n$$

تطبيق

أودعَت شَركةَ النَقل السِياحي مَبلغاً قَدرهُ 200000 ل.س بفَائِدة مُعدلَهَا 9% سنوياً.

لنَحسُب كُلاً مِن الفائِدة البسيطَة والفَائِدة المُركَّبة فِي الحَالات الآتية:

1- المدة 6 أشهر $n = \frac{6}{12}$

الفائدة البسيطة:

$$I = 200000\,(0.09)\,(\frac{6}{12})$$

$I \approx 9000$

الفائدة المركَّبة:

$I = 200000\,[(1.09)^{1/2} - 1]$

$I \approx 8806$

2- المدة سنة واحدة n=1

$C = 200000 \qquad i = 9\%$

الفائدة البسيطَة

$I = Cin$

$I = 200000\,(0.09)(1)$

$I \approx 18000$

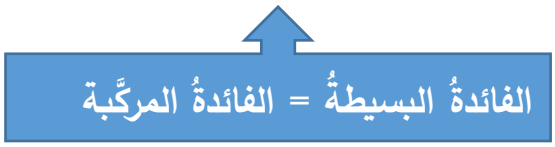
الفائدة المركَّبة

$I = C[\,(1+I)^n - 1]$

$I = 200000\,[(0.09)^1 - 1]$

$I = 200000\,(0.09)$

$I \approx 18000$



3- المدَّة سنتان n=2

الفائدة البسيطَة:

$I = 200000\,(0.09)\,(2)$

$I \approx 36000$

الفائدة المُركَّبة:

$I = 200000\,[(0.09)^2 - 1]$

$I = 200000\,(0.1881)$

I≈ 37620

تمارين رياضية

التَّمرين الأوَّل:

اختَرِ الإجابةَ الصَّحيحة من الإجابات الآتية:

1- قانون الفائدة المُركَّبة:

A) $I= C[(1- (1+i)]^{-n}$

B) $I= C [(1+i)^{n}-1]$

C) $I= C [(1+i)^n+1]$

D) $I= C[(1+i)^n*1]$

2- قانون الجُملة المُركَّبة:

A) $C_n = C (1+i)^n$

B) $C_n = C (1+i)^{-n}$

C) $C_n = C (1-i)^n$

D) $C^n = C[(1+i)*1]$

3- المُعدَّل الحقيقيُّ المكافئُ 8% سنوياً حيث تُضاف الفائدة مرَّتين بالعام:

A) i = 8%

B) i = 8.13%

C) i = 8.16%

D) i = غير ذلك

4- عندَ إيداع مَبلغ 10000 ل.س في مَصرفٍ بمعدَّل فائِدة مركَّبة 5% سَنوياً لمُدة عَامين فإنَّ جُملة هذا المَبلغ هي:

أ- تصافُ الفائِدة سنوياً

A) 10200 B) 11100 C) 11025 D) غير ذلك

ب- تضافُ الفائِدة مرَّتين بالعام

A) 10140 B) 11038 C)10410 D) غير ذلك

ت- تضافُ الفائِدة شهرياً

B) 11020 B) 11100 C) 11049 D) غير ذلك

ث- تضافُ الفائِدة يومياً

C) 11052 B) 11055 C)11085 D) غير ذلك

5- إنَّ الفائدة المُركَّبة المترتبة عن نفس المبلغ بنفس المُعدَّل والمدَّة هي:

أ- تصافُ الفائِدة سنوياً

B) 1000 B) 1025 C) 1100 D) غير ذلك

ب- تضافُ الفائِدة مرَّتين بالعام

D) 1038 B) 1138 C) 1315 D) غير ذلك

ت- تضافُ الفائِدة شهرياً

E) 898.84 B) 1049 C) 950 D) غير ذلك

ث- تضافُ الفائِدة يومياً

A) 1252 B) 1152 C) 1052 D) غير ذلك

التَّمرين الثَّاني:

قامَ مَالك فُندق الشَـام بايدَاع مَبلغ 180000 في مَصـرفِ لمُدة 3 سـنوات بفائدةٍ مركَّبة مُعدَّلها 5% سنوياً على أن تُضاف الفائِدة كُل 3 أشهر.

أوجِد مِقدَار الفَوائد التي حَصل عَليها مَالك فُندق الشَام.

التَّمرين الثَّالث

ما هو المَبلغ الذي تَزيد فائِدتهُ المُركَّبة عَن فائدتهِ البسـيطَة بمقدَار 167.552 ل.س لمدة 3 سـنوات بمعدَّل فائِدة 8% سنوياً؟

التَّمرين الرَّابع

لدى فُندق الشِـيراتون مَبلغ 200000 ل.س يُريد اسـتثمَارهَا في أحدِ المَصـارف لمُدةِ 5 سـنوات، إذَا كَان لديه الخَيارات التالية:

1- مُعدَّل فائِدة 6% سنوياً.
2- مُعدَّل فائِدة 6%سنوياً، تُضاف الفائِدة ثلاث مَرات بالعامِ.
3- مُعدَّل فائِدة 6%سنوياً، تُضاف الفائِدة شهرياً.
4- مُعدَّل فائِدة 6%سنوياً، تُضاف الفائِدة يومياً.

ما الرصيد المتكَّون له بكلٍ من الخَياراتِ السابقة؟ وما الخَيار الأفضَل.