الجمهورية العربية السورية

وزارة السياحة

الرياضيات في العمليات الفندقية

الأول الثانوي المهني الفندقي

2021-2020

المُتواليَّة الحسابيَّة

Successive Calculation

نشاط فكري

تمَ اِفتِتَاح مَطعَم الوردَة الشَاميَة والذَي يتَسِع لـــــ 190 شَخص وكَانَ عَدد الضُيوف فِي اليَوم الأوَّل مِنَ الافتتاح 30 شَخص، وقَد تَوقعَت إدَارة المَطعَم أن يَزدادَ عَددُ الضُـــيوف بمقدِارِ 20 ضَـــيفاً يَومياً.

كَم عَدد الضُيوف الذينَ مِنَ المُتوقَع أن يرتَادوا المَطعَم بعدَ خَمسَة أيام مِن الإفِتتَاح وبَعد كَم يومَاً سيكُون مَشغولاً بالكَامِل...؟

أولاً: المتوالية

هي مجموعةٌ مِنَ الأعدادِ مرتبةٌ حَسْبَ قاعدةٍ معينة تُبيّنُ كَيفيَّة حسابِ قيمَة أيَّ عددٍ منها.

تعريف المُتواليَّة الحسابيَّة:

هي مجموعةٌ منتهية من الأعدادِ الحقيقية نحصلُ على كلِّ حدٍّ منها بجمع أو طرح عددٍ ثابتٍ مع الحَد الذي يسبقهُ يُسمَّى هذا العَدد الثابْت بأساسِ المُتواليَّة الحسابيَّة ويُرْمَزُ لهُ بالرَّمز (r) ويُفْصَلُ بينَ حدودِها بـ (،).

وتُكتَب المُتواليَة عَلى الشَكلِ التَالي: $a_1 \text{ ، } a_2 \text{ ، } a_3 \text{ ، } \ldots\ldots\ldots\ldots\text{، } a_n$

الرُموزُ المُستخدمَة:

الحدُّ الأوَّل للمُتواليَّة	a_1
الحدُّ الثَّاني للمُتواليَّة	a_2
الحدُّ الثَّالث للمُتواليَّة	a_3
الحدُّ العامُّ للمُتواليَّة (الحد النوني)	a_n
الفاصِلُ بينَ الحدود	،
عددُ حدودِ المُتواليَّة أو رتَبة الحد	N
مجموعُ حدود المُتواليَّة	S_n

ثانياً: أساسُ المُتواليَّة

هو الفرقُ بينَ أيَّ حدين متتاليْيَن (اللَّاحق – السَّابق)

$$r = a2 - a1 = a3 - a2 = \ldots\ldots$$

مثال:

ما أساسُ المُتواليَّة الحسابيَّة الآتية؟

5 ، 7 ، 9 ، 13 ، 11

الحلُ:

$a_1 = 5 \qquad a_2 = 7 \qquad n = 5 \qquad r = ?$

$r = a_2 - a_1$

$r = 7 - 5$

$r = 2$

مثال: ما أساسُ المُتواليَّة الحسابيَّة الآتية؟ وما هُو عَدد حُدودَهَا؟ ومَا قِيمَة الحَد الرَّابع؟ ومَا هُوَ قيمَة الحَد الأخير؟

$$2 , 6 , 10 , 14 , 18 , 22 , 26 , 30$$

الحلُ:

أساسُ المُتواليَّة الحسابيَّة $r = a_2 - a_1$

$$r = 6 - 2 = 4$$

عدد حُدود المُتواليَّة الحسابيَّة $n = 8$

قيمة الحدَّ الرَّابِع $a_4 = 14$

قيمة الحدَّ الأخير $a_8 = 30$

مثال: لو عُدنَا إلى النَشـــاطِ الفِكري فِي مُقدمةِ البَحث لوجدنَا أنَّ عَددُ روادَ المَطعم يتوقَّع أنَ يَتزايد يَومياً وفقَ مُتواليَة حِسابيَّة (عَددية) كَالتالي:

$$30 , 50 , 70 , 90 , 110 , 130 , 150 , 170 , 190$$

$n_{n=9} = 190$ و a_2 , ……..

ومنها نجد أنَّ $a_1 = 30$ و $= 50$

$$r = 50 - 30 = 70 - 50 = \cdots .. = 190 - 170 = 20$$

وأنَّ أساس المتواليَّة :

$$n = 9$$

وأنَّ عدد حدود المتواليَّة الحسابيَّة السابقة هو :

وأنَّ عَدد رُوَاد المَطعَم بعدَ خمسَة أيام من افتتاحهُ هو $a_5 = 110$

ثالثاً: أنواع المتوالية الحسابية

1. المتوالية المتزايدة:

هي المُتواليَّةُ التي يكونُ أساسُها مُوجِباً ($r > 0$).

تطبيق : (1)

1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9

r = 3-1

r = 2 > 0

تطبيق : (2)

$\frac{1}{3}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{4}{3}$

$a_1 = \frac{1}{3}$ $a_2 = \frac{5}{6}$ $r = ?$

$r = a_2 - a_1$

$r = \frac{5}{6} - \frac{1}{3}$

$r = \frac{5 - 2}{6}$

$r = \frac{3}{6} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$

2. المتوالية الناقصة:

هي المُتواليَّة التي يكونُ أساسُها سالِباً (r < 0)

تطبيق : (1)

15 ، 12 ، 9 ، 6 ، 3

r = 12 – 15

r = - 3 < 0

تطبيق : (2)

0.2 ، -0.1 ، - 0.4

$a_1 = 0.2$ $a_2 = -0.1$ $r = ?$

$r = a_2 - a_1$

$r = -0.1 - 0.2$

$r = -0.3$

تطبيق : (3)

-3 , -6 , -9 , -12 , -15

$a_1 = -3$ $a_2 = -6$ $r = ?$

$r = a_2 - a_1$

$r = -6 - (-3)$

$r = -6 + 3$

$r = -3$

رابعاً: الحد العام للمتوالية

يُمكِنُ حِسابُ أي حدٍّ من حدودِ المُتواليَّة بالإِعتمادِ على قانونِ الحدِّ العامّ (الحدُّ النُونِي):

$$a_n = a_1 + (n-1)\, r$$

مثال: أوجد الحدَّ السَّادسَ في المُتواليَّةِ الآتيةِ:

4 ، 7 ، .....

الحلُّ:

$a_1 = 4$ $n = 6$ $a_2 = 7$ $a_6 = ?$

نوجد أولاً أساس المُتواليَة (r) $r = a_2 - a_1$

$r = 7 - 4 \longrightarrow r = 3$

ثم نُعوض بالقانونِ :

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_6 = 4 + (6-1)\,(3)$ فيكُون : a_6

$= 4 + (5)\,(3)$

$a_6 = 4 + (15)$

$a_6 = 19$

مثال: أوجد رُتْبَةَ الحدَّ الذي قيمتُهُ 21 في المُتواليَّةِ الحسابيَّة الآتية:

3 ، 5 ، .....

الحلُّ:

$a_1 = 3 \quad a_2 = 5 \quad n = ? \quad a_n = 21$

$r = a_2 - a_1$

$r = 5 - 3 \longrightarrow r = 2$

$a_n = a_1 + (n - 1)\,r$

$21 = 3 + (n - 1)\,r$

$21 - 3 = 2n - 2$

$18 + 2 = 2n$

$20 = 2n$

$n = \frac{20}{2}$

$n = 10$

وبالتالي: نَجِدُ أنَّ رُتبةَ الحدَّ الذي قيمتُهُ 21 هو الحدُّ العاشِر $a_{10} = 21$

مثال: هل العددُ 17 هو حدٌّ في المُتواليّةِ الحسابيَّة الآتيةِ:

1 ، 3 ، .....

الحلُّ:

$a_1 = 1 \quad a_2 = 3 \quad a_n = 17 \quad n = ?$

$r = a_2 - a_1$

$r = 3 - 1$

$r = 2$

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$17 = 1 + (n-1)2$

$17 = 1 + 2n-2$

$17 + 1 = 2n$

$n = \frac{18}{2}$

$n = 9$

نجد أن العَدد (17) هو الحدَّ التَّاسع في المتواليَّة $a_9 =$

17

مثال:

مُتواليَّةٌ حسابيَّةٌ مَجموعُ حدَّيْها الخَّامِس والسَّابع يُساوي (32) وحدُّها الأوَّل يساوي (1).

المطلوب: 1- أوجدْ أساسَ المُتواليَّة. 2- أوجدْ قيمةَ الحدَّ العاشِر.

الحلُّ:

$a_5 = a_7 = 32 \quad a_1 = 1 \quad r = ? \quad a_{10}$

$a_6 = \frac{a_5 + a_7}{2}$

$a_6 = \frac{32}{2}$

$a_6 = 16$

لإيجادِ الأساس نُطّبَّقُ قانون الحدَّ العامّ.

$a_n = a + (n-1)r$

$16 = 1 + (6-1)(r)$

$16 - 1 = 5r$

$15 = 5r$

$r = \frac{15}{5}$

$r = 3$

لإيجادِ قيمةِ الحدَّ العاشر:

$$a_{10} = a_1 + 9_r$$

$$a_{10} = 1 + (9)(3)$$

$$a_{10} = 28$$

ملاحظة

يَتم تَشكِيل أية مُتواليَّة حِسابيَّة إذَا عُلمَ حدُّها الأوَّل $\mathbf{a}$ وحدُهَا الأخَير a_n وعَدد حُدودَها $\mathbf{n}$ مِن خِلال مَعرفة أساس المُتواليَّة كَما يَلي:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{a_n} - \mathbf{a_1}}{\mathbf{n} - \mathbf{1}}$$

لاحِظ أنَّه تم استنتَاج هَذهِ العَلاقة مِن عَلاقةِ الحد العام.

مثال: مُتواليةٌ عَدديَة حَدوهَا الأوَّل $a_1 = 4$ والأخير $a_4 = 16$ وعَدد حُدودَهَا $n=5$ فمَا هُو أساس المُتواليَة.

$$a_1 = 4 \quad a_5 = 16 \quad n = 5$$

$$r = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$$

$$r = \frac{16 - 4}{5 - 1}$$

$$r = \frac{12}{4}$$

$$r = 3$$

خامساً: خواص المتوالية الحسابية:

الخاصَّةُ الأُولى: كلُّ حدٍّ في المُتواليَّةِ الحسابيَّةِ، هو وَسَطٌ حسابي بينَ مجاوريه.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

مثال: في المُتواليَّة الحسابيَّة الآتية:

1 ، 4 ، 7 ، 10 ، 13

نُلاحِظ حَسْبَ الخاصَّةِ أنَّ:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

$$a_2 = \frac{1+7}{2}$$

$$a_2 = 4$$

الخاصَّةُ الثَّانيةُ: إنَّ حاصلَ مَجموع أيّ حدَّينِ متساويي البُعدِ عن طَرفَيْ المُتواليَّةِ الحسابيَّة ثابت ويُساوي مجمُوعَ الطرفين.

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2=\cdots}$$

مثال: الحدودُ الآتيةُ تُمَثلُ مُتواليَّةً حسابيَّةً.

3 ، 5 ، 7 ، 9 ، 11 ، 13 ، 15

بحَسْب الخاصَّة نُلاحظ أنَّ:

$$a_1 + a_7 = a_2 + a_6 = a_3 + a_5 =$$

$$1 + 15 \quad = 5 + 13 \quad = 7 + 11 = 18$$

مثال: مُتواليةٌ حسابيّةٌ مؤلَّفةٌ من (10) حدود، حدُّها الثاني يُساوي (4) ومَجموعُ طرفيها يساوي (22) ما هُو حَدُّها التَاسِع ومَا هُو أساسُ المُتواليَّة؟

الحلُّ:

بحَسْبِ الخاصَّة الثَّانية فإنَّ مَجموعُ الحدَّيْن الأوَّل والعَاشِر يُسَاوي مجمُوعَ الحدَّيْن الثَّاني والتاسع.

$$n = 10 \qquad a_2 = 4 \qquad a_1 + a_{10} = 22 \qquad a_9 = ? \qquad r = ? \qquad a_{10} = ?$$

$$a_1 + a_{10} = a_2 + a_{19} = 22$$

$22 = 4 + a_9$

$a_9 = 22 - 4$

$a_9 = 18$

بفَرض أنَّ عَدد حُدود المُتواليَّة السَـــابقة **n=8 بحيثُ حَدُها الأوَّل هُو** $a_2 = 4$ **وحَدُّها الأخير** $a_9 = 18$

فيكون

$$a_9 = a_2 + (n-1)r$$

$18 = 4 + (8-1)r$

$18 = 4 + 7r \longrightarrow 18-4 = 7r$

$14 = 7r$

$r = \frac{14}{7} = 2$

$a_{10} - a_9 = 2$

$a_{10} - 18 = 2$

$a_{10} = 20$

مثال: مُتواليةٌ حسابيَّةٌ مُتناقصَة، مَجمُوع حَدهُا الأوَّل والسَّادس (1) وحدُهَا الثَّالث (2).

المطلوب: 1- وجِدْ الحدَّ الرَّابع. 2- أوجِدْ أساسَ المُتواليَّة.

الحلُّ:

$a_1 + a_6 = 1 \quad a_3 = 1 \quad a_4 = ? \quad r = ?$

$a + a_6 = a_2 + a_5 = a_3 + a_4$

$a + a_6 = a_3 + a_4$

$1 = 2 + a_4$

إيجادُ الحدَّ الرَّابع:

$$a_4 = 1 - 2 \Rightarrow a_4 = -1$$

$r = a_4 - a_3$

إيجادُ الأساس:

$r = -1 - 2$

$r = -3$

الخاصَّــةُ الثَّالثَة: إذا كَانَ عَددُ حُدود المُتواليَّة الحِســابيَّة فَردياً فإنَّ للمُتواليَّة حَداً أوســطَاً، ويكُون مَجمُوع طَرفي المُتواليَّة الحِسابيَّة يُساوي ضُعفَ الحَّد الأوسَط.

مثال: في المُتواليةِ الحِسابيَّة الآتية:

3 ، 6 ، 9 ، 12 ، 15

الحلُّ :

حَدوهَا الأوسط $a_3 = 9$

مَجموعُ طَرفيهَا $a_1 + a_5 = 3 + 15 = 18$

$9\ (2) = 18$

$a_1 + a_5 = 2\, a_3 = 18$

الخاصَّــةُ الرَّابِعَة: إن إضَــافَة (طَرح) عَدد ثَابِت لحُدود المُتواليَّة الحِســابيَّة يُعطِي مُتواليَّة حِســابيَة جَديدَة أساسُهَا هُو أساسُ المُتواليَّة الحِسابيَّة الأولى نفسهُ.

مثال: في المُتواليَّة الحِسابيَّة الآتية:

4 ،7 ، 10 ، 13 ، 16 ، 19

واضِح أن $r = 3$

بإضافةِ العَدد 2 إلى حُدودِ المُتواليَّة السَابقَة ينتج المُتواليَّة:

6 ،9 ، 12 ، 15 ، 18 ، 21

منَ الواضِح أنَّ أساسُ المُتواليَّة الجَديدَة هُو $r = 3$ أيضاً وهُو نَفسُ المُتواليَّة الأولى.

<u>الخاصَّـةُ الخَّامسَـة</u>: إنَّ ضَرب (قِسمَة) حُدود المُتواليَّة الحِسابيَّة بعددٍ ثَابتٍ يُعطِي مُتواليَّة حِسابيَّة جَديدَة أساسُهَا هُو أساسُ المُتواليَّة الحِسابيَّة الأولى مَضروبَاً (مَقسُومَا) بأساسِ المُتواليَّة الأولى.

مثال: في المُتواليَّة الحسابيَّة الآتية:

4 ،7 ، 10 ، 13 ، 16 ، 19

واضح أن $r = 3$

لو ضَربنَا حُدود المُتواليَّة بالعَدد (2) يَنتُج المُتواليَّة الحسابيَّة التَالية:

8 ،14 ، 20 ، 26 ، 32 ، 38

واضح أن أساس المُتواليَّة الجَديدة **هو** $r=6$

$r = 3\ (2) = 6$

سادساً: مجموع حدود المتوالية الحسابية

يَتمُّ حسابُ مَجموع حدود المُتواليَة الحسابيَّة بتَطبيقِ القانونِ الآتي:

إذا توفر لدينا الحدُّ الأوَّل والأخير:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

أمَّا إذا توفَّرَ لدينا الحدُّ الأوَّل والأَساس نُطبق القانونَ الآتي:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r]$$

مثال: أوجدْ مجموعَ حُدود مُتواليَّة حسابيَّة عَدد حُدودَها $n = 9$ حدُها الأوَّل $a_1 = 3$ وحدُهَا الأخَير $r = 27$

الحلُّ:

$$a_1 = 3 \qquad a_9 = 27 \qquad n = 9$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_9)$$

$$S_n = \frac{9}{2}(3 + 27)$$

$$S_n = \frac{9}{2}(30)$$

$$S_n = 135$$

مثال:

أوجدْ مَجموعُ حُدود مُتواليَّة حِسـابيَّة عَدد حُدودَها $n = 8$ حَدهُا الأول $a_1 = 3$ أسـاسُـها $r = 27$

الحلُّ:

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2_{a_1} + (n-1)r\right]$$

$$S_n = \frac{8}{2}\left[2(3) + (8-1)(3)\right]$$

$$S_n = 4\,[6 + 21] \quad \Rightarrow \quad S_n = 4\,)27(= 108$$

تمارين رياضية

التَّمرين الأوَّل:

ضع إشارَة صَح أو خطأ مَع تصحيح الخطأ أمامَ العباراتِ التالية:

1- $r = a_3 - a$ ( )

.....

2- تكونُ المُتواليَّةُ الحسابيَّة مُتناقِصَة إذا كان $r > 0$ ( ) .....

3- نحصـــلُ على مَجمُوع حُدود المُتواليَّة الحســـابيَّة مِن القانون $S_n = \frac{n}{3}(a_1 + a_n)$ ( )

.....

4- نحصلَ على أساسِ المُتواليَّة الحسابيَّة مِن القانون $r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$

( ).....

5- إنَّ حَاصِـل جِداء أيّ حدَّين مُتسـاويي البُعد عن طَرفي المُتواليَّة ثابِت ويُسـاوي حَاصِـل جِداء الطَرفين ( ) .....

التَّمرين الثَّاني:

اختر الإجابةَ الصَّحيحة:

في المُتواليَّة الحسابيَّة : **3 ,8 ,13 ,18 ,23 .**

1- أساس المُتواليَّة (r)

$r = 4$ $r = 5$ $r = 6$ $r = 1$

2- الحدُ التَّاسِع هو:

$a_9 = 36$ $a_9 = 22$ $a_9 = 43$ $a_9 = 52$

3- مجمُوعُ حدُودهَا السَّتة S_6:

$S_6 = 70$ $S_6 = 78$ $S_6 = 93$ $S_6 = 98$

التَّمرين الثَّالث:

أكمل كلاً من المُتواليات الحسابيَّة الآتية:

35 ، ..... ، ....., ..., ..., ..., **5**

25 ، ....., ..., ..., ..., ..., **7**

التَّمرين الرَّابع:

مُتواليَة حسابيَّة حدُّها الأوَّل 7 وحدُّها الأخير 59 ومجمُوعُ حدودِها 462

المَطلُوب:

1- أوجدْ عددَ حدودِ المُتواليَّة.

2- أوجدْ أساسَ تِلك المُتواليَّة.

التَّمرين الخَّامِس:

أوجِد مَجمُوع الحُدود السَّتَة الأوُلى لكلٍ من المُتواليتين:

5 ، 3 ، 1 ، ... ...

−4 ، 2 ، 8 ، ... ...