الرياضيات في العمليات الفندقية

المُتواليَّة الحسابيَّة

البحث: السادس

محتويات الوحدة

- المتوالية.
- أساس المُتواليَّة.
- أنواع المتوالية الحسابية.
- الحد العام للمتوالية.
- خواص المتوالية الحسابية.
- مجموع حدود المتوالية الحسابية.

المتوالية

هي مجموعةٌ مِنَ الأعدادِ مرتبةٌ حَسْبَ قاعدةٍ معينة تُبيِّنُ كَيفيَّة حسابِ قيمَة أيَّ عددٍ منها.

تعريف المُتواليَّة الحسابيَّة:

هي مجموعةٌ منتهية من الأعدادِ الحقيقية نحصلُ على كلِّ حدٍّ منها بجمع أو طرح عددٍ ثابتٍ مع الحَد الذي يسبقهُ يُسمَّى هذا العَدد الثابْت بأساسِ المُتواليَّة الحسابيَّة ويُرْمَزُ لهُ بالرَّمز (r) ويُفْصَلُ بينَ حدودِها بـ (،).

وتُكتَب المُتواليَة عَلى الشَكلِ التَالي: a1 ، a2 ، a3 ، ..... ، an

المتوالية

الرُموزُ المُستخدمَة:

الحدُّ الأوَّل للمُتواليَّة	a_1
الحدُّ الثَّاني للمُتواليَّة	a_2
الحدُّ الثَّالث للمُتواليَّة	a_3
الحدُّ العامُّ للمُتواليَّة (الحد النوني)	a_n
الفاصِلُ بينَ الحدود	،
عددُ حدودِ المُتواليَّة أو رتَبة الحد	N
مجموعُ حدود المُتواليَّة	S_n

أساس المُتواليَّة

هو الفرقُ بينَ أيَّ حدين متتاليْيَن (الَّلاحق – السَّابق)

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

مثال:

ما أساسُ المُتواليَّة الحسابيَّة الآتية؟

5 ، 7 ، 9 ، 13 ، 11

الحلُ:

$a_1 = 5$ $a_2 = 7$ n= 5 r =?

$r = a_2 - a_1$

$r = 7 - 5$

$r = 2$

أساس المُتواليَّة

مثال: ما أساسُ المُتواليَّة الحسابيَّة الآتية؟ وما هُو عَدد حُدودَهَا؟ ومَا قِيمَة الحَد الرَّابع؟ ومَا هُوَ قيمَة الحَد الأخير؟

2 , 6 , 10 , 14 , 18 , 22 , 26 , 30

الحلُ:

أساسُ المُتواليَّة الحسابيَّة $\mathbf{r = a_2 - a_1}$

$\mathbf{r = 6 - 2 = 4}$

عدد حُدود المُتواليَّة الحسابيَّة $\mathbf{n = 8}$

قيمة الحدَّ الرَّابِع $\mathbf{a_4 = 14}$

قيمة الحدَّ الأخير $\mathbf{a_8 = 30}$

أساس المُتواليَّة

مثال : لو عُدنَا إلى النَشاطِ الفِكري فِي مُقدمةِ البَحث لوجدنَا أنَّ عَددُ روادَ المَطعم يتوقَع أنَ يَتزايد يَومياً وفقَ مُتواليَة حِسابيَّة (عَددية) كَالتالي:

30 ، 50 ، 70 ، 90 ، 110 ، 130 ، 150 ، 170 ، 190

ومنها نجد أنَّ : $a_1 = 30$ و $a_2 = 50$ و . . . . . ، $\mathbf{n}_{n=9} = 190$

وأن أساس المتوالية:

$$r=50-30=70-50=\cdots..=190-170=20$$

وأن عدد حدود المتوالية الحسابية السابقة هو $n = 9$

وأن عدد رواد المطعم بعد خمسة أيام من افتتاحه هو $a_5 = 110$

أنواع المتوالية الحسابية

المتوالية المتزايدة:

هي المُتواليَّةُ التي يكونُ أساسُها مُوجِباً ($r > 0$).

تطبيق : (1)

1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9

$r = 3 - 1$

$r = 2 > 0$

أنواع المتوالية الحسابية

تطبيق : (2)

$$\frac{1}{3} \quad ، \frac{5}{6} \quad ، \frac{4}{3}$$

$$a_1 = \frac{1}{3} \qquad a_2 = \frac{5}{6} \qquad r = ?$$

$$r = a_2 - a_1$$

$$r = \frac{5}{6} - \frac{1}{3}$$

$$r = \frac{5 - 2}{6}$$

$$r = \frac{3}{6} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

أنواع المتوالية الحسابية

المتوالية الناقصة:

هي المُتواليَّة التي يكونُ أساسُها سالِباً (r < 0)

تطبيق : (1)

3 ، 6 ، 9 ، 12 ، 15

r = 12 – 15
r = – 3 < 0

أنواع المتوالية الحسابية

تطبيق : (2)

$0.2 \quad ، \quad -0.1 \quad ، \quad -0.4$

$a_1 = 0.2 \qquad a_2 = -0.1 \qquad r = ?$

$r = a_2 - a_1$

$r = -0.1 - 0.2$

$r = -0.3$

أنواع المتوالية الحسابية

تطبيق : (3)

$-3 , -6 , -9 , -12 , -15$

$a_1 = -3$ $\quad a_2 = -6$ $\quad r = ?$

$r = a_2 - a_1$

$r = -6 - (-3)$

$r = -6 + 3$

$r = -3$

الحد العام للمتوالية

يُمكِنُ حِسابُ أي حدٍّ من حدودِ المُتواليَّة بالإعتمادِ على قانونِ الحدِّ العامّ (الحدُّ النُونِي):

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r$$

مثال:
أوجد الحدَّ السَّادسَ في المُتواليَّةِ الآتيةِ:

4 ، 7 ، .....

الحلُّ:

$a_1 = 4$ $\quad n = 6$ $\quad a_2 = 7$ $\quad a_6 = ?$

نوجد أولاً أساس المُتواليَة (r) $r = a_2 - a_1$

$r = 7 - 4 \Rightarrow r = 3$

ثم نُعوض بالقانونِ :

$a_n = a_1 + (n-1)r$

فيكُون :

$a_6 = 4+(6-1)\,(3)$
$a_6 = 4 + (5)\,(3)$
$a_6 = 4 + (15)$
$a_6 = 19$

أنواع المتوالية الحسابية

مثال:

أوجد رُتْبَةَ الحدَّ الذي قيمتُهُ 21 في المُتواليَّةِ الحسابيَّة الآتية:

3 ، 5 ، .....

الحلُّ:

$a_1 = 3$ $a_2 = 5$ $n = ?$ $a_n = 21$

$r = a_2 - a_1$

$r = 5 - 3 \Rightarrow r = 2$

$a_n = a_1 + (n - 1)\, r$

$21 = 3 + (n - 1)\, r$

$21 - 3 = 2n - 2$

$18 + 2 = 2n$

$20 = 2n$

$n = \frac{20}{2}$

$n = 10$

وبالتالي: نَجِدُ أنَّ رُتبةَ الحدَّ الذي قيمتُهُ 21 هو الحدُّ العاشِر $a_{10} = 21$

أنواع المتوالية الحسابية

مثال: هل العددُ 17 هو حدٌّ في المُتواليّةِ الحسابيَّة الآتيةِ:

1 ، 3 ، .....

الحلُّ:

$a_1 = 1$ $a_2 = 3$ $a_n = 17$ $n = ?$

$r = a_2 - a_1$

$r = 3 - 1$

$r = 2$

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$17 = 1 + (n-1)2$

$17 = 1 + 2n - 2$

$17 + 1 = 2n$

$n = \frac{18}{2}$

$n = 9$

نجد أن العَدد (17) هو الحدَّ التَّاسع في المتواليَّة $a_9 = 17$

أنواع المتوالية الحسابية

مثال:

مُتواليَّةٌ حسابيَّةٌ مَجموعُ حدَّيْها الخَّامِس والسَّابع يُساوي (32) وحدُّها الأوَّل يساوي (1).

المطلوب:

1- أوجدْ أساسَ المُتواليَّة.

2- أوجدْ قيمةَ الحدَّ العاشِر.

الحلُّ:

$$a_5 = a_7 = 32 \qquad a_1 = 1 \qquad r = ? \qquad a_{10}$$

$$a_6 = \frac{a_5 + a_7}{2}$$

$$a_6 = \frac{32}{2}$$

$$a_6 = 16$$

أنواع المتوالية الحسابية

لإيجادِ الأساس نُطّبَّقُ قانون الحدَّ العامّ.

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$16 = 1 + (6 - 1)(r)$$
$$16 - 1 = 5r$$
$$15 = 5r$$
$$r = \frac{15}{5}$$
$$r = 3$$

أنواع المتوالية الحسابية

لإيجادِ قيمةِ الحدَّ العاشر:

$$a_{10} = a_1 + 9r$$

$$a_{10} = 1 + (9)(3)$$

$$a_{10} = 28$$

ملاحظة

يَتم تَشكِيل أية مُتواليَّة حِسابيَّة إذَا عُلمَ حدُّها الأوَّل a_1 وحدُهَا الأخَير a_n وعَدد حُدودَها **n** مِن خِلال مَعرفة أساس المُتواليَّة كَما يَلي:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{a_n} - \mathbf{a_1}}{\mathbf{n} - \mathbf{1}}$$

لاحِظ أنَّه تم استنتَاج هَذهِ العَلاقة مِن عَلاقةِ الحد العام.

أنواع المتوالية الحسابية

مثال:

مُتواليةٌ عَدديَة حَدوهَا الأوَّل $a_1 = 4$ والأخير $a_4 = 16$ وعَدد حُدودَهَا n=5 فمَا هُو أساس المُتواليَة.

$$a_1 = 4 \quad a_5 = 16 \quad n = 5$$

$$r = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$$

$$r = \frac{16 - 4}{5 - 1}$$

$$r = \frac{12}{4}$$

$$r = 3$$

خواص المتوالية الحسابية:

الخاصَّةُ الأُولى: كلُّ حدٍّ في المُتواليَّةِ الحسابيَّةِ، هو وَسَطٌ حسابي بينَ مجاوريه.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

مثال:

في المُتواليَّة الحسابيَّة الآتية:

1 ، 4 ، 7 ، 10 ، 13

نُلاحِظ حَسْبَ الخاصَّةِ أنَّ:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

$$a_2 = \frac{1 + 7}{2}$$

$$a_2 = 4$$

خواص المتوالية الحسابية:

الخاصَّةُ الثَّانيةُ: إنَّ حاصلَ مَجموع أيّ حدَّينِ متساويي البُعدِ عن طَرفَيْ المُتواليَّةِ الحسابيَّة ثابت ويُساوي مجمُوعَ الطرفين.

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots$$

مثال: الحدودُ الآتيةُ تُمَثلُ مُتواليَّةً حسابيَّةً.

3 ، 5 ، 7 ، 9 ، 11 ، 13 ، 15

بحَسْب الخاصَّة نُلاحظ أنَّ:

$$a_1 + a_7 = a_2 + a_6 = a_3 + a_5$$
$$= 1+15 = 5+13 = 7+11 = 18$$

أنواع المتوالية الحسابية

مثال:

مُتواليةٌ حسابيّةٌ مؤلَّفةٌ من (10) حدود، حدُّها الثاني يُساوي (4) ومَجموعُ طرفيها يساوي (22) ما هُو حَدُّها التَاسِع ومَا هُو أساسُ المُتواليَّة؟

الحلُّ:

بحَسْبِ الخاصَّة الثَّانية فإنَّ مَجموعُ الحدَّيْن الأوَّل والعَاشِر يُسَاوي مجمُوعَ الحدَّيْن الثَّاني والتاسع.

$n = 10$ $a_2 = 4$ $a_1 + a_{10} = 22$ $a_9 = ?$ $r = ?$ $a_{10} = ?$

$$a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = 22$$

$$22 = 4 + a_9$$

$$a_9 = 22 - 4$$

$$a_9 = 18$$

أنواع المتوالية الحسابية

بفَرض أنَّ عَدد حُدود المُتواليَّة السَابقة n=8 بحيثُ حَدُها الأوَّل هُو $a_2 = 4$ وحَدُّها الأخير $a_9 = 18$ فيكون:

$$a_9 = a_2 + (n-1)r$$
$$18 = 4 + (8-1)r$$
$$18 = 4 + 7r \quad \Longrightarrow \quad 18-4 = 7r$$
$$14 = 7r$$
$$r = \frac{14}{7} = 2$$
$$a_{10} - a_9 = 2$$
$$a_{10} - 18 = 2$$
$$a_{10} = 20$$

أنواع المتوالية الحسابية

مثال: مُتواليةٌ حسابيَّةٌ مُتناقصَة، مَجمُوع حَدهُا الأوَّل والسَّادس (1) وحدُهَا الثَّالث (2).
المطلوب: 1- وجِدْ الحدَّ الرَّابع. 2- أوجِدْ أساسَ المُتواليَّة.
الحلُّ:

$$a_1 + a_6 = 1 \qquad a_3 = 2 \qquad a_4 = ? \qquad r = ?$$

$$a_1 + a_6 = a_2 + a_5 = a_3 + a_4$$

$$a_1 + a_6 = a_3 + a_4$$

$$1 = 2 + a_4$$

إيجادُ الحدَّ الرَّابع:

$$a_4 = 1 - 2 \Rightarrow a_4 = -1$$

$$r = a_4 - a_3$$

إيجادُ الأساس:

$$r = -1 - 2$$

$$r = -3$$

أنواع المتوالية الحسابية

الخاصَّةُ الثَّالثَة:

إذا كَانَ عَددُ حُدود المُتواليَّة الحِسابيَّة فَردياً فإنَّ للمُتواليَّة حَداً أوسطَاً، ويكُون مَجمُوع طَرفي المُتواليَّة الحِسابيَّة يُساوي ضُعفَ الحَّد الأوسَط.

مثال: في المُتواليةِ الحِسابيَّة الآتية:

3 ، 6 ، 9 ، 12 ، 15

الحلُّ :

حَدوهَا الأوسط $a_3 = 9$

مَجموعُ طَرفيهَا $a_1 + a_5 = 3 + 15 = 18$

$9\ (2) = 18$

$a_1 + a_5 = 2\, a_3 = 18$

أنواع المتوالية الحسابية

<u>الخاصَّةُ الرَّابِعَة:</u> إن إضَافَة (طَرح) عَدد ثَابِت لحُدود المُتواليَّة الحِسابيَّة يُعطِي مُتواليَّة حِسابيَة جَديدَة أساسُهَا هُو أساسُ المُتواليَّة الحِسابيَّة الأولى نفسهُ.

مثال:

في المُتواليَّة الحِسابيَّة الآتية:

4، 7، 10، 13، 16، 19

واضِح أن **r =3**

بإضافةِ العَدد 2 إلى حُدودِ المُتواليَّة السَابقَة ينتج المُتواليَّة:

6، 9 ، 12، 15 ، 18 ، 21

منَ الواضِح أنَّ أساسُ المُتواليَّة الجَديدَة هُو r =3 أيضاً وهُو نَفسُ المُتواليَّة الأولى.

أنواع المتوالية الحسابية

الخاصَّةُ الخَّامسَة: إنَّ ضَرب (قِسمَة) حُدود المُتواليَّة الحِسابيَّة بعددٍ ثَابتٍ يُعطِي مُتواليَّة حِسابيَّة جَديدَة أساسُهَا هُو أساسُ المُتواليَّة الحِسابيَّة الأولى مَضروبَاً (مَقسُومَا) بأساسِ المُتواليَّة الأولى.

مثال: في المُتواليَّة الحسابيَّة الآتية:

4، 7 ، 10، 13 ، 16 ، 19

واضح أن **r =3**

لو ضَربنَا حُدود المُتواليَّة بالعَدد (2) يَنتُج المُتواليَّة الحسابيَّة التَالِيَة:

8، 14 ، 20، 26 ، 32 ، 38

واضح أن أساس المُتواليَّة الجَديدة **هو r=6**

r = 3 (2) = 6

مجموع حدود المتوالية الحسابية

يَتمُّ حسابُ مَجموعِ حدود المُتواليَة الحسابيَّة بتَطبيقِ القانونِ الآتي:
إذا توفر لدينا الحدُّ الأوَّل والأخير:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

أمَّا إذا توفَّرَ لدينا الحدُّ الأوَّل والأَساس نُطبق القانونَ الآتي:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r]$$

مجموع حدود المتوالية الحسابية

مثال:

أوجدْ مجموعَ حُدود مُتواليَّة حسابيَّة عَدد حُدودَها $n = 9$ حدُها الأوَّل $a_1 = 3$ وحدُهَا الأخَير $a_9 = 27$

الحلُّ:

$$a_1 = 3 \qquad a_9 = 27 \qquad n = 9$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_9)$$

$$S_n = \frac{9}{2}(3 + 27)$$

$$S_n = \frac{9}{2}(30)$$

$$S_n = 135$$

مجموع حدود المتوالية الحسابية

مثال:

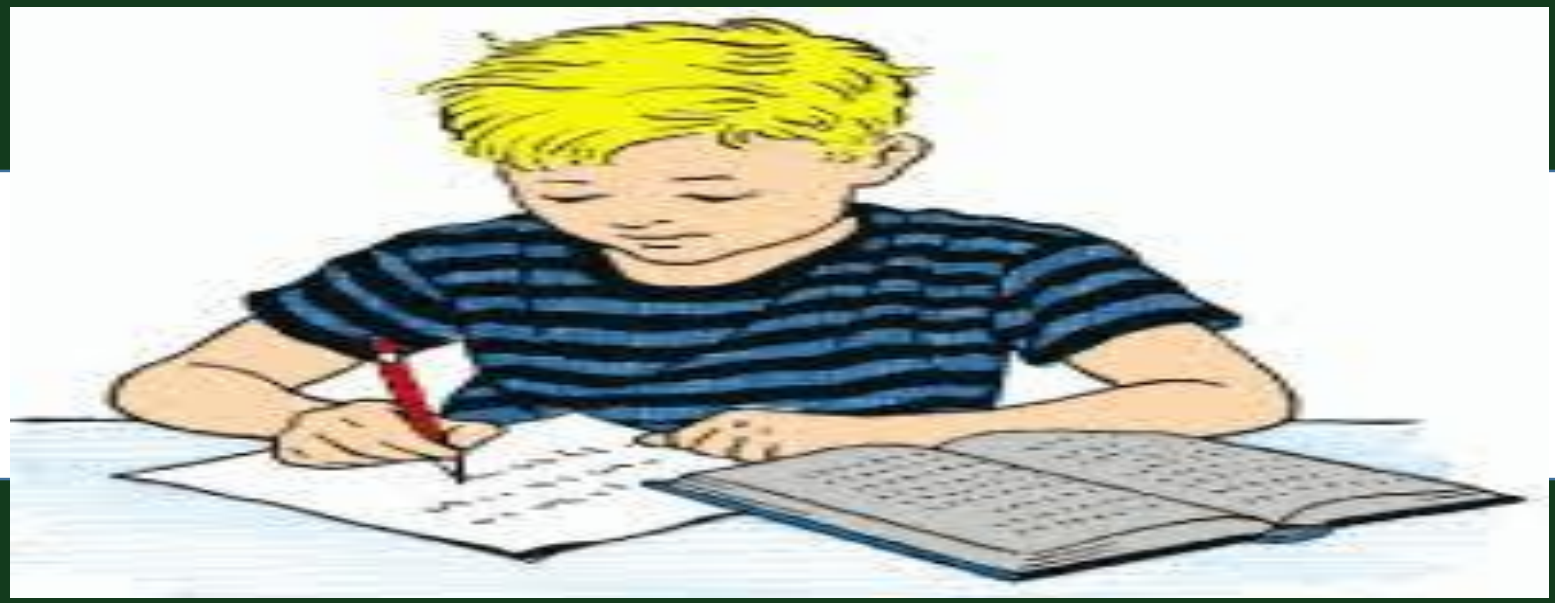
أوجدْ مَجموعُ حُدود مُتواليَّة حِسابيَّة عَدد حُدودَها $n = 8$ حَدهُا الأول $a_1 = 3$ أساسُها $r = 27$

الحلُّ:

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)r\right]$$

$$S_n = \frac{8}{2}\left[2(3) + (8-1)(3)\right]$$

$$S_n = 4\left[6 + 21\right] \quad \Rightarrow \quad S_n = 4\,(27) = 108$$



انتهى البحث السادس