الجمهورية العربية السورية

وزارة السياحة

الرياضيات في العمليات الفندقية

الأول الثانوي المهني الفندقي

2021-2020

المُتوالية الهندسيَّة

Geometric progression

نشاط فكري

أرادَ وَزيرٌ هنديٌ أنْ يُبعِدَ الملكَ عَن نفسِ ملكهِ فاخترعَ لُعبةَ الشَّطرنجِ وأَهداهَا للمَلك الذي بلغَ إعجابُه بهَا حداً جعلَهُ يطلُب من وزيرِه أن يتمنَّى عليه ما يشَاء.

فمَا كَانَ مِن الوزير إلاَّ أنْ طلبَ مِقداراً من القَمح بوضْعِ حَبَّة من القَمْح على المُربَّع الأول منَ الشِّطرنجِ ثمَّ حبَّتين في المربَّع الثَّاني وأربعٍ في الثَّالث وهكذا بمُضاعفة العدد النَّاتِج حتى آخر مربَّع فتعجَّب الملكُ من تَواضُعِ وزيرِه وأصدرَ أمرَهُ لِمَن يَلزَم بتلبيةِ الطلَّب .

هل استطاعَ المَلكُ تنفيذَ طلَّبَ وزيرهُ.....؟؟؟؟

أولاً: تعريف المتوالية الهندسية

هي مجمُوعةٌ مُنتهيَة مِن الحُدود نحصَل عَلى كُلِ حدَّ منهَا بضَرب الحدَّ السَّابق لهُ بعددٍ ثابتٍ، يُسمى الأساسُ، حَيثُ كُل حدٍ مِن حُدودَهَا $(a_i \ \epsilon R)$.

الرُموز ُالمُستخدمة:

رمز المتواليَّة	÷
الحدُّ الأوَّل للمُتواليَّة	a_1
الحدُّ الثَّاني للمُتواليَّة	a_2
الحدُّ الأخير للمُتواليَّة (العامُّ)	a_n
الأساس	R
الفاصِلُ بينَ الحدود	:
عَددُ حدودِ المُتواليَّة	N
مجموعُ حُدود المُتواليَّة	S_n

$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : \dots\dots\dots\dots\dots a_n$

ثانياً: أساس المتوالية الهندسية

أساسُ المُتواليَّة: هُو حاصلُ قِسمة أيّ حدَّين مُتتاليَين

الأساس = $\frac{\text{الحدُّ اللاحق}}{\text{الحدُّ السَّابق}}$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

تطبيق:

لإيجادِ الأساس فِي كُلٍ مِن المُتواليَات الآتية:

$3 : 9 : 27 : 81$

$90 : 30 : \frac{10}{3} : \frac{10}{9}$

$2 : -4 : 8 : -16$

نقُوم بمَا يلي:

$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

في المُتواليَّة الأولى $r= 3$

في المُتواليَّة الثَّانية $r= \frac{1}{3}$

في المُتواليَّة الثَّالثة $r = -2$

ثالثاً: أنواع المتوالية الهندسية

يُوجَد ثَلاث أنواع للمُتواليَّة الهندسيَّة وهِي :

المُتواليَّة الهَندسيَّة المُتزايدة:

عندمَا يكُون أساسُ المُتواليَّة الهَندسيَّة أكبَر مِن الواحد (كمَا فِي المُتواليَّة الأولى مِنَ التطبيقِ السَابق) عندئذٍ نقُول عنهَا مُتواليَّة هندسيَّة مُتزايدة.

استنتاج

عندمَا يكُون الحدُّ الأول للمُتوالية الهندسيَّة يُساوي الصِفر
فلا وجُود للمُتوالية.
عندما يكون أساسُ المتوالية الهندسيَّة تساوي الواحد $r = 1$
فلا وجُود للمُتوالية.
إذا كَان الحدّ الأول في المُتواليَة الهندسيَّة سَالباً وأساسُها مُوجباً فإنَّ جَميع حُدودَهَا سَالبَة وبالتالي فهيَ مُتناقِصَة.

مُتواليَّة مُتزايدَة

مِن المُتواليَّة الهَندسيَة الأولى (كمَا فِي التَطبيقِ السَابق) نَجد أنَّ $r = 3 > 1$

المتواليَّة الهندسيَّة المُتناقصَة:

عندمَا يكُون أسَاسُ المُتواليَّة الهندسيَّة أكبَر مِنَ الصفر وأصغَر مِنَ الواحِد (كمَا فِي المُتواليَّة الثَّانيَة مِن التَطبيق السَابِق) عندئذٍ نقول عنهَا مُتواليَّة هَندسيَّة مُتناقِصَة.

مُتواليَّة مُتناقصة

$$0 < r < 1$$

مِن المُتواليَّة الهَندسيَّة الثَّانية (كمَا في التَطبيق السَابق) نَجِد أنَّ $0 < r = \frac{1}{3} < 1$

المُتواليَّة الهندسيَّة المُتناوبَة: عندمَا يكُون أسَاسُ المُتواليَّة الهَندسيَّة أصغَر من الصفر (كمَا في المُتواليَّة الثَّالثة مِن التَطبيق السَابق) عِندئذٍ نقُول عنهَا مُتواليَّة هندسيَّة مُتناوبَة.

مُتواليَة مُتناوبة

$$r < 0$$

من المُتواليَّة الهَندسيَّة الثَّانيَة (كمَا فِي التَطبيق السَابق) نَجد أنَّ $r = -2 < 0$

رابعاً: الحد العام (النوني) للمتوالية الهندسية

يُمكنُ حسابُ أي حدَّ مِن حُدود المُتواليَّة الهندسيَّة اعتماداً على العَلاقة الآتية:

$$a_n = ar^{n-1}$$

على سبيل المثال $a_3 = a_1 r^2$ و $a_5 = a_1 r^4$

نلاحظ:

مِنَ المِثالين السَابقين أنَّ قوةَ أساسُ المُتواليَة الهندسيَّة تَنقُص بمقدَار 1 عَن رُتبة الحَد المَطلُوب حِسابهُ.

تطبيق:

لحساب الحدِّ الخَّامِس في المُتواليَّة الهندسيَّة الآتية:

$3 : 9$

$a_1 = 3 \quad a_5 = ?$

$r = \frac{9}{3}$

$r = 3$

$a_5 = a_1 r^4$

$a_5 = 3\,(3)^4$

$a_5 = 3\,(81) = 243$

برأيكَ مَا نَوع هذِهِ المُتوالية الهَندسيَّة؟

تطبيق:

ما هُو رُتبة الحَّد الذي قيمتهُ 128 في مُتواليَة هندسيَة حَدُهَا الأول $a_1 = 4$ وأساسها r =2.

$a_1 = 4 \quad r = 2 \quad a_n = 128 \quad n = ?$

$a_n = a_1 r^{n-1}$

$128 = 4\,(2)^{n-1}$

$\frac{972}{4} = 2^{n-1}$

$32 = 2^{n-1}$

$(2)^5 = 2^{n-1} \quad \Rightarrow \quad n - 1 = 5 \Rightarrow \quad n = 6$

أي أنَّ الحَّد الذي قيمتهُ 128 هو الحَّد السَادس

تطبيق:

ما هُو أساس المُتواليَّة الهندسيَة حدهَا الأوَّل $a_1 = 3$ وحدَّها الأخَير $a_6 = 3072$.

$n = 6 \quad a_1 = 3 \quad a_6 = 3072$

$a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_n = a_1 r^5 \quad \Rightarrow \quad 3072 = 3\,r^5 \Rightarrow 3072 = 3\,r^5$

$\frac{3070}{3} = r^5$

$r^5 = (4)^5 \quad \Rightarrow \quad r = 4$

تطبيق:

لو أردنَا إدخَال ثَلاثة أعدَاد بَينَ العَددين 16 ، 1 لتُشكِل فيمَا بينهَا مُتواليَة هندسيَّة.

$a_1 = 1 \quad a_n = 16 \quad n = 5$

$a_n = ar^{n-1}$

$16 = 1\,(r)^4$

$$r^4 = 16$$

$$r = \sqrt[4]{16}$$

$$r = (16)^{\frac{1}{4}}$$

$$r = 2$$

أو يُمكننَا تَحليل 16 إلى عَواملِهِ الأوليَّة فَينتُج لدينَا:

$$r^4 = 2^4$$

$$r = 2$$

$$a_2 = ar$$

$$a_2 = 1\,(2) \qquad a_2 = 2$$

$$a_3 = a_2 r$$

$$a_3 = 2\,(2) \qquad a_3 = 4$$

$$a_4 = a_3 r$$

$$a_4 = 4(2) \qquad a_4 = 8$$

$$1 : 2 : 4 : 8 : 16$$

ملاحظة

عندَ معرفتنا لأيّ حدّيَن من حُدود المُتواليَّة الهندسيَة يُمكننَا الاعتماد على الصَّيغَة الآتية:

الحدَّ ذو المَنزلة الكبيرة = الحدَّ ذو المنزلَة الصَغيرة × الأساسُ مرفوع إلى أُسّ يُساوي الفرق بَين المَنزلتين.

على سبيل المثال:

$$a_9 = a_3\, r^6$$

$$a_{13} = a_9\, r^4$$

تطبيق:

لإيجَاد الأساس مُتواليَّة هندسيَّة حَدُهَا الثَّالث 8 وحدُهَا التَاسِع 512:

$$a_9 = 512 \qquad a_3 = 8 \qquad r = ?$$

$$a_9 = a_3\, r^6$$

$$512 = 8(r)^6$$

$$r^6 = \frac{512}{8}$$

$$r^6 = 64$$

$$r^6 = 2^6 \qquad r = 2$$

خامساً: خواص المتوالية الهندسية

الخاصية الأولى: إنَّ أيّ حدَّ في المُتواليَّة الهندسيَّة هُو وسَطٌ هندسيٌ بينَ مُجاورين.

$$2\ ,4\ ,8\ ,16$$

$$4 = \sqrt{2\ (8)}$$

مُمكِن أن نصيغَ الخَاصة السَابقَة كما يلي:

(إنَّ مُربَع أيّ حدَّ فِي المُتواليَّة الهندسيَّة هو جِداءٌ لحدَّيهِ المُجاورين)

$$(a_n)^2 = a_{n-1}\ a_{n-1}$$

على سبيل المثال:

$$(a_9)^2 = a_8\, a_{10}$$

$$(a_3)^2 = a_2\, a_4$$

تطبيق:

لحسابِ الحدّ السَّابع في مُتواليَّة هندسيَّة مُتزايدة حدّها السَّادس 3 وحدّها الثَّامن 48.

$$(a_7)^2 = a_6\, a_8$$

$$(a_7)^2 = 3\,(48)$$

$$(a_7)^2 = 144$$

$$a_7 = \sqrt{144} = \mp 12$$

$$a_7 = +12$$

نرفض قيمة -12 لأن المتوالية متزايدة

الخاصـية الثانية: حاصـلُ جِداء أيّ حدَّين مُتسـاويـيّ البُعد عن طَرفي المُتواليَّة الهندسـيَّة يُسـاوي جِداء الحدّ الأوَّل في الحدّ الأخير.

$$a_1 a_n = a_2 a_{n-1} = a_3 a_{n-2} = \ldots\ldots\ldots$$

على سَبيل المِثَال:

في المُتواليَّة التي عَدد حُدودهَا زوجي:

$$\because\ a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5 : a_6$$

$$\because$$

$$a_1\, a_6 = a_2\, a_5$$

$$= a_3\, a_4$$

يكون

أما في المتواليَّة التي عَدد حُدودَها فَردي:

$\therefore\ a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5 : a_6 : a_7 : a_8 : a_9$

$\therefore$

$a_1\, a_9 = a_2\, a_8 = a_3\, a_7 = a_4\, a_6$

$= (a_5)^2$ يكون

تطبيق:

لحســـابِ الحدّ الثَّالث في المُتواليَّة الهندســـيَّة المُؤلَّفة مِن 7 حُدود، حدَّها الأوَّل (1) وحدَّها الأخير (729) وحدَّها الخَّامس (81).

$\mathbf{n = 7} \quad \mathbf{a_3 = ?} \quad \mathbf{a_1 = 1} \quad \mathbf{a_5 = 81} \quad \mathbf{a_7 = 729}$

$\mathbf{a_1\, a_7 = a_3\, a_5}$

$\mathbf{1\,(729) = a_3\,(81)}$

$$a_3 = \frac{729}{81}$$

$$a_3 = 9$$

تطبيق:

أوجِد الحدّ الأوَّل في المُتواليَّة الهندسيَّة المُؤلفَة من 8 حدُود، حدُها الأخير يُساوي 384 وجِدَاء حدَّيهَا الأوسطَين 1152، ثم أوجِد أساس هذهِ المُتواليَّة.

الحل:

$\mathbf{a_1 a_8 = a_4\, a_5}$

$\mathbf{a_1\,(384)^5 = 1152}$

$$a_1 = \frac{1152}{384} = 3$$

نحسُب الأساس كَما يلي:

$\mathbf{a_8 = a_1 r^7}$

$$384 = 3\,(r^7)$$

$$r^7 = \frac{384}{3}$$

$$r^7 = 128$$

$$r = \sqrt[7]{128}$$

$$r = 2$$

سادساً: مجموع حدود المتوالية الهندسية

لإيجادِ مجموع حدود المُتوالية الهندسيَّة نميزُ بين:

1- المُتواليَّةُ الهندسيَّة المَحدودة سواءٌ كانت مُتزايدةً أم مُتناقصةً نَستخدِم القانون الآتي للمُتواليَّة المُتزايدة:

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

والقانون الآتي للمُتواليَّة المُتناقصَة:

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

2- المُتوالية الهندسيَّة غير المحدودة المُتناقصة (اللَّانهائية) $n = \infty$

نستخدم القانون الآتي: حيث $r^\infty = 0$

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$

ملاحظة

إذا كانت المُتوالية الهندسيَّة مُتزايدة وغير محدودة فإنَّ مجمُوع حُدودِها يُساوي ∞

تطبيق:

لحسابِ مجموع الحُدود السَّبعَة الأولى مِن المُتواليَّة الهندسيَّة الآتية:

2 : 6 : ... ...

الحل:

$$a_1 = 2 \qquad a_2 = 6 \qquad n = 10 \qquad S_7 = ?$$

$$r = \frac{a_2}{a_1}$$

$$r = \frac{6}{2}$$

$$S_n = a_1 \left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right)$$

$$S_7 = 2 \left(\frac{(3)^7 - 1}{3 - 1}\right)$$

$$S_7 = 2 \left(\frac{2187 - 1}{2}\right)$$

$$S_7 = 2186$$

تطبيق:

مُتواليَّة هندسيَّة مَجمُوع حُدودَها الثَّلاثة الأولى يُساوي 62 مَجمُوع حُدودَها الثَّاني والثَّالث والرَّابع يُساوي 310 أوجِد أساس المتُواليَّة وحدُها الأول.

الحل:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 62$$

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 = 62$$

$$(1 + r + r^2) a_1 = 62$$

$$a_1 = \frac{62}{1 + r + r^2}$$

$$a_2 + a_3 + a_4 = 310$$

$$a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 = 310$$

$$(r + r^2 + r^3) a_1 = 310$$

$$a_1 = \frac{310}{r + r^2 + r^3}$$

$$\frac{310}{r + r^2 + r^3} = \frac{62}{1 + r + r^2}$$

$$(1 + r + r^2)\, 310 = (r + r^2 + r^3)\, r62$$

$$62r = 310$$

$$r = \frac{310}{62}$$

$$r = 5$$

$$a_1 = \frac{62}{1 + r + r^2}$$

$$a_1 = \frac{62}{1 + 5 + (5)^2}$$

$$a_1 = \frac{62}{1 + 5 + 25}$$

$$a_1 = \frac{62}{31}$$

$$a_1 = 2$$

تطبيق:

أوجِد مَجمُوع السِتَة حُدود الأولى فِي المُتواليَّة:

$24 , 12 , \ldots\ldots\ldots\ldots$

الحل:

$$a_1 = 24 \quad a_2 = 12 \quad n = 6 \quad S_n = 0$$

نُلاحظ أنَّ المُتواليَة مُتناقِصَة ويكُون:

$$r = \frac{a_2}{a_1}$$

$$r = \frac{12}{24} \quad \Rightarrow \quad r = 0.5 \quad \Rightarrow 0 < r < 1$$

$$S_n = a_1 \left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right)$$

$$S_6 = 24 \left(\frac{1 - (0.5)^6}{1 - 0.5}\right)$$

$$S_6 = 24 \left(\frac{1 - 0.015625}{0.5}\right)$$

$$S_6 = 12\,(1 - 0.015625)$$

$$S_6 = 12\,(0.984375)$$

$$S_6 = 11.8125$$

تطبيق:

أوجِد مَجمُوع حُدود المُتواليَّة الهندسيَّة غَير المُنتهيَة الآتية:

$16\,,8\,,\ldots\ldots\ldots$

الحل:

$a_1 = 16 \quad a_2 = 8 \quad n = \infty \quad S_{-\infty} = ?$

$$r = \frac{8}{16} = 0.5$$

$$S_{-\infty} = \frac{16}{1 - 0.5}$$

$$S_{-\infty} = \frac{16}{0.5}$$

$$S_{-\infty} = 32$$

تطبيق:

لإيجادِ مَجموع حُدود في المُتوالية الهندسيَّة الآتية:

$\therefore 8 : 2 : \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\therefore a_1 = 8 \quad a_2 = 2 \quad S_\infty = ? \quad n = \infty$

$$r = \frac{a_2}{a_1} \qquad r = \frac{2}{8} \qquad r = \frac{1}{4}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} \qquad S_\infty = \frac{8}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$S_\infty = \frac{8}{\frac{3}{4}} \qquad S_\infty = \frac{32}{3} \qquad S_\infty \approx 10.67$$

تمارين رياضية

التَّمرين الأوَّل:

اختر الإجابةَ الصَّحيحة مِمَا يَأتي:

5 : 15 : 45

- **في المُتواليَّة الهندسيَّة**

1- أساسُ المُتواليَّة

$A)\ r = 10$ $B)\ r = 3$ $C)\ r = \frac{1}{3}$

2- الحدَّ الخَّامِس

$A)\ a_5 = 1125$ $B)\ a_5 = 225$ $C)\ a_5 = 405$

3- مجموع الحُدود الخمّسة الأولى

$A)\ S_5 = 244$ $B)\ S_5 = 435$ $C)\ S_5 = 605$

- **في المُتواليَّة الهندسيَّة**

8 : 4 : 2 : ... ... ∞

1- نوع المُتواليَّة

$A)$ الانهائية $B)$ مُتناقصة $C)$ مُتناوبة

2- أساسُها

$A)\ r = \frac{1}{2}$ $B)\ r = 2$ $C)$ غير ذلك

3- الحدَّ السَّادس

$A)\ a_6 = 0.5$ $B)\ a_6 = 5$ $C)\ a_6 = 0.25$

4- مجموع حُدودها

$A)\ S_\infty = 8$ $B)\ S_\infty = 20$ $C)\ S_\infty = 8$

- **في المُتواليَّة الهندسيَّة**

$2 : -6 : 18 : \ldots\ldots$

1- نوع المُتواليَّة

A) مُتزايدة **B)** مُتناقصة **C)** مُتناوبة

2- أساسُها

$A)\ r = \frac{1}{3}$ $B)\ r = 3$ $C)\ r = -3$

3- الحدَّ السَّابع

$A)\ a_7 = 486$ $B)\ a_{7a} = 1458$ $C)\ a_7 =$ غير ذلك

التَّمرين الثَّاني:

مُتواليَّة هندســـيَّة مُتزايدَة الفَرقُ بَين حدَّيها الثَّاني والثَّالث 8 وحدّها الرابع يزيدُ عن الحدّ الثَّاني بمقَدار 24.

المطلُوب: ما مجموعُ حدودَها الخَمسة الأولى؟

التَّمرين الثَّالث:

أوجِد ثلاثةَ حدود تُشـكّل فيمَا بينهما مُتوالية هندسـيَّة مُتزايدة إذا عَلمتَ أنَّ الحدّ الثَّاني يزيدُ عن الحدّ الأول بمقدارِ (15) والحدّ الثَّالث يَزيد عَن الحدّ الأول بِمقدار (75)، ثمَّ أوجِد أســـاسَ تلكَ المُتوالية ومجمُوع حدودها الخَمسة الأولى.

التَّمرين الرَّابع:

ما العدد الواجبُ إضـــافتهُ إلى كلّ مِن الأعدَاد (51 ، 15 ، 3) حتى تشـــكّل فيما بينها مُتواليَّة هندسيَّة مُتزايدة.

وإذَا عَلمْتَ أنَّ الحدّ الأخير هو 486، أوجدْ مجموعَ حدود هذه المُتواليَّة.

التَّمرين الخَامِس:

لدينا المُتواليَّة الهندسيَّة الآتية:

$$6 \; : \; 4 \; : \; \frac{8}{3} : \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$

أوجِد الحدَّ الرَّابِع، ثُم أوجِدْ مَجموعَ حدودِها

التَّمرين السَّادِس:

مُتوالية هندسيَّة مُتزايدَة حدُهَا الثَّاني 9 وحَدهَا الخَّامس 243.

المطلوب:

1- إيجاد أساس المُتوالية.
2- إيجاد الحدَّ العَاشر.
3- إيجاد الحدَّ الأوَّل.
4- ما مجموعُ حُدودها السَّتة الأولى.

التَّمرين السَابع

في المتواليَّة الهندسيَّة

$$6 \; : \; 4 \; : \; \frac{8}{3} : \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$

المطلُوب:

1- إيجاد أساس المُتواليَّة.
2- إيجاد الحدَّ السَابِع
3- إيجادُ مجموع الحُدود التّسعة الأولى.

(قرّب النَّاتج إلى أقربِ مَنزلتين عُشريَّتين)