الرياضيات في العمليات الفندقية

المُتوالية الهندسيَّة

البحث: السابع

محتويات الوحدة

- ❖ تعريف المتوالية الهندسية.
- ❖ أساس المتوالية الهندسية.
- ❖ أنواع المتوالية الهندسية.
- ❖ الحد العام (النوني) للمتوالية الهندسية.
- ❖ خواص المتوالية الهندسية.
- ❖ مجموع حدود المتوالية الهندسية.

تعريف المتوالية الهندسية

هي مجمُوعةٌ مُنتهيَة مِن الحُدود نحصَل عَلى كُلِ حدَّ منهَا بضَرب الحدَّ السَّابق لهُ بعددٍ ثابتٍ، يُسمى الأساسُ، حَيثُ كُل حدٍ مِن حُدودَهَا.

$(a_i \epsilon R)$

الرُموزُ المُستخدمةُ:

رمز المتواليَّة	÷
الحدُّ الأوَّل للمُتواليَّة	a_1
الحدُّ الثَّاني للمُتواليَّة	a_2
الحدُّ الأخير للمُتواليَّة (العامُّ)	a_n
الأساس	R
الفاصِلُ بينَ الحدود	:
عَددُ حدودِ المُتواليَّة	N
مجموعُ حُدود المُتواليَّة	S_n

أساس المتوالية الهندسية

أساسُ المُتواليَّة: هُو حاصلُ قِسمة أيّ حدَّين مُتتاليَين

$$\text{الأساسُ} = \frac{\text{الحدُّ اللاحق}}{\text{الحدُّ السَّابق}}$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \quad \dots\dots\dots\dots \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

أساس المتوالية الهندسية

تطبيق:

لإيجادِ الأساس فِي كُلٍ مِن المُتواليَات الآتية:

$$3 : 9 : 27 : 81$$

$$90 : 30 : \frac{10}{3} : \frac{10}{9}$$

$$2 : -4 : 8 : -16$$

نقُوم بمَا يلي:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots\dots\dots\dots\dots.$$

في المُتواليَّة الأولى $r = 3$

في المُتواليَّة الثَّانية $r = \frac{1}{3}$

في المُتواليَّة الثَّالثة $r = -2$

أنواع المتوالية الهندسية

يُوجَد ثَلاث أنواع للمُتواليَّة الهندسيَّة وهِي :

المُتواليَّة الهَندسيَّة المُتزايدة:

عندمَا يكُون أساسُ المُتواليَّة الهَندسيَّة أكبَر مِن الواحد (كمَا فِي المُتواليَّة الأولى مِنَ التطبيقِ السَابق) عندئذٍ نقُول عنهَا مُتواليَّة هندسيَّة مُتزايدة.

$$\boxed{\mathbf{r > 1}}$$

مِن المُتواليَّة الهَندسيَة الأولى (كمَا فِي التَطبيقِ السَابق) نَجد أنَّ $r=3 > 1$

المتواليَّة الهندسيَّة المُتناقصَة:

عندمَا يكُون أساسُ المُتواليَّة الهندسيَّة أكبَر مِنَ الصفر وأصغَر مِنَ الواحِد (كمَا فِي المُتواليَّة الثَّانيَة مِن التَطبيق السَابِق) عندئذٍ نقول عنهَا مُتواليَّة هَندسيَّة مُتناقِصَة.

$$\boxed{\mathbf{0 < r < 1}}$$

مِن المُتواليَّة الهَندسيَّة الثَّانية (كمَا في التَطبيق السَابق) نَجِد أنَّ $0 < r = \frac{1}{3} < 1$

أنواع المتوالية الهندسية

المُتواليَّة الهندسيَّة المُتناوبَة: عندمَا يكُون أساسُ المُتواليَّة الهَندسيَّة أصغَر من الصفر (كمَا في المُتواليَّة الثَّالثة مِن التَطبيق السَابق) عِندئذٍ نقُول عنهَا مُتواليَّة هندسيَّة مُتناوبَة.

$$\mathbf{r} < \mathbf{0}$$

استنتاج

عندمَا يكُون الحدُّ الأول للمُتوالية الهندسيَّة يُساوي الصِفر
فلا وجُود للمُتوالية.
عندما يكون أساسُ المتوالية الهندسيَّة تساوي الواحد $r = 1$
فلا وجُود للمُتوالية.
إذا كَان الحدّ الأول في المُتواليَة الهندسيَّة سَالباً وأساسُها مُوجباً فإنَّ جَميع حُدودَهَا سَالبَة وبالتالي فهيَّ مُتناقِصَة.

من المُتواليَّة الهَندسيَّة الثَّانيَة (كمَا فِي التَطبيق السَابق) نَجد أنَّ $r = -2 < 0$

الحد العام (النوني) للمتوالية الهندسية

يُمكنُ حسابُ أي حدَّ مِن حُدود المُتواليَّة الهندسيَّة اعتماداً على العَلاقة الآتية:

$$\mathbf{a_n = ar^{n-1}}$$

على سبيل المثال: $a_3 = a_1 r^2$ و $a_5 = a_1 r^4$

نلاحظ:
مِنَ المِثالين السَابقين أنَّ قوةَ أساسُ المُتواليَة الهندسيَّة تَنقُص بمقدَار 1 عَن رُتبة الحَد المَطلُوب حِسابهُ.

الحد العام (النوني) للمتوالية الهندسية

تطبيق:

لحساب الحدِّ الخَّامِس في المُتواليَّة الهندسيَّة الآتية:

$$3 : 9$$

$$a_1 = 3 \qquad a_5 = ?$$

$$r = \frac{9}{3}$$

$$r = 3$$

$$a_5 = a_1 r^4$$

$$a_5 = 3\,(3)^4$$

$$a_5 = 3\,(81) = 243$$

برأيكَ مَا نَوع هذهِ المُتوالية الهَندسيَّة؟

الحد العام (النوني) للمتوالية الهندسية

تطبيق:

ما هُو رُتبَة الحَّد الذي قيمتهُ **128** في مُتواليَة هندسيَة حَدُهَا الأول $a_1 = 4$ وأساسها **r =2**.

$$a_1 = 4 \quad r = 2 \quad a_n = 128 \quad n = ?$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$128 = 4\,(2)^{n-1}$$

$$\frac{128}{4} = 2^{n-1}$$

$$32 = 2^{n-1}$$

$$(2)^5 = 2^{n-1} \Rightarrow n - 1 = 5 \Rightarrow n = 6$$

أي أنَّ الحَّد الذي قيمتهُ 128 هو الحَّد السَادس

الحد العام (النوني) للمتوالية الهندسية

تطبيق:

ما هُو أساس المُتواليَّة الهندسيَة حدهَا الأوَّل $a_1 = 3$ وحدَّها الأخَير $a_6 = 3072$.

$$\mathbf{n = 6} \qquad \boldsymbol{a_1 = 3} \qquad \boldsymbol{a_6 = 3072}$$

$$\boldsymbol{a_n = a_1 r^{n-1}}$$

$$a_n = a_1 r^5 \rightarrow 3072 = 2r^5 \rightarrow r^5 = \frac{3072}{3}$$

$$\mathbf{r^5 = (4)^5 \quad \Rightarrow r = 4}$$

الحد العام (النوني) للمتوالية الهندسية

تطبيق:

لو أردنَا إدخَال ثَلاثة أعدَاد بَينَ العَددين **16** ، **1** لتُشكِل فيمَا بينهَا مُتواليَة هندسيَّة.

$$a_1 = 1 \qquad a_n = 16 \qquad n = 5$$

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$16 = 1\,(r)^4$$

$$r^4 = 16$$

$$r = \sqrt[4]{16}$$

$$r = (16)^{\frac{1}{4}}$$

$$r = 2$$

الحد العام (النوني) للمتوالية الهندسية

أو يُمكننَا تَحليل **16** إلى عَوامِلهِ الأوليَّة فَينتُج لدينَا:

$$r^4 = 2^4$$

$$r = 2$$

$$a_2 = ar$$

$$a_2 = 1\,(2) \qquad a_2 = 2$$

$$a_3 = a_2 r$$

$$a_3 = 2\,(2) \qquad a_3 = 4$$

$$a_4 = a_3 r$$

$$a_4 = 4(2) \qquad a_4 = 8$$

$$1 : 2 : 4 : 8 : 16$$

الحد العام (النوني) للمتوالية الهندسية

ملاحظة

عندَ معرفتنا لأيّ حدّيَن من حُدود المُتواليَّة الهندسيَة يُمكننَا الاعتماد على الصَّيغَة الآتية:

الحدَّ ذو المَنزلة الكبيرة = الحدَّ ذو المنزلَة الصَغيرة × الأساسُ مرفوع إلى أُسّ يُساوي الفرق بَين المَنزلتين.

على سبيل المثال:

$$a_9 = a_3\, r^6$$

$$a_{13} = a_9\, r^4$$

الحد العام (النوني) للمتوالية الهندسية

تطبيق:

لإيجَاد الأساس مُتواليَّة هندسيَّة حَدُهَا الثَّالث **8** وحدُهَا التَاسِع **512**:

$$\boldsymbol{a_9 = 512} \qquad \boldsymbol{a_3 = 8} \qquad \mathbf{r} = ?$$

$$\boldsymbol{a_9 = a_3\, r^6}$$

$$\mathbf{512 = 8(\boldsymbol{r})^6}$$

$$\boldsymbol{r^6 = \frac{512}{8}}$$

$$\boldsymbol{r^6 = 64}$$

$$\boldsymbol{r^6 = 2^6} \qquad \boldsymbol{r = 2}$$

خواص المتوالية الهندسية

الخاصية الأولى: إنَّ أيّ حدَّ في المُتواليَّة الهندسيَّة هُو وسَطٌ هندسيٌ بينَ مُجاورين.

$$\mathbf{2\ ,4\ ,8\ ,16}$$

$$\mathbf{4 = \sqrt{2\ (8)}}$$

مُمكِن أن نصيغَ الخَاصة السَابقَة كَما يلي:

(إنَّ مُربَع أيّ حدَّ فِي المُتواليَّة الهندسيَّة هو جِداءٌ لحدَّيهِ المُجاورين)

$$\boldsymbol{(a_n)^2 = a_{n-1}\ a_{n-1}}$$

على سبيل المثال:

$$(a_9)^2 = a_8\, a_{10}$$

$$(a_3)^2 = a_2\, a_4$$

خواص المتوالية الهندسية

تطبيق:

لحسابِ الحدّ السَّابع في مُتواليَّة هندسيَّة مُتزايدة حدّها السَّادس 3 وحدّها الثَّامن 48.

$$(a_7)^2 = a_6\, a_8$$

$$(a_7)^2 = 3\ (48)$$

$$(a_7)^2 = 144$$

$$a_7 = \sqrt{144} = \mp 12$$

$$a_7 = +12$$

نرفض قيمة -12 لأن المتوالية متزايدة

خواص المتوالية الهندسية

الخاصية الثانية: حاصلُ جِداء أيّ حدَّين مُتساويِيّ البُعد عن طَرفي المُتواليَّة الهندسيَّة يُساوي جِداء الحدّ الأوَّل في الحدّ الأخير.

$$a_1 a_n = a_2 a_{n-1} = a_3 a_{n-2} = \dots\dots\dots$$

على سَبيل المِثَال:

في المُتواليَّة التي عَدد حُدودهَا زوجي:

$$\because\ a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5 : a_6$$

$$\therefore\ a_1\, a_6 = a_2\, a_5 = a_3\, a_4 \quad \text{يكون}$$

أما في المتواليَّة التي عَدد حُدودَها فَردي:

$$\because\ a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5 : a_6 : a_7 : a_8 : a_9$$

$$\therefore\ a_1\, a_9 = a_2\, a_8 = a_3\, a_7 = a_4\, a_6 = (a_5)^2 \quad \text{يكون}$$

خواص المتوالية الهندسية

تطبيق:

لحسابِ الحدّ الثَّالث في المُتواليَّة الهندسيَّة المُؤلَّفة مِن **7** حُدود، حدَّها الأوَّل **(1)** وحدَّها الأخير **(729)** وحدَّها الخَّامس **(81)**.

$$\mathbf{a_7 = 729 \qquad a_5 = 81 \qquad a_1 = 1 \qquad a_3 = ? \qquad n = 7}$$

$$\mathbf{a_1\ a_7 = \boldsymbol{a_3\ a_5}}$$

$$\mathbf{1\,(729) = \boldsymbol{a_3}\,(81)}$$

$$\boldsymbol{a_3 = \frac{729}{81}}$$

$$\boldsymbol{a_3 = 9}$$

خواص المتوالية الهندسية

تطبيق:

أوجِد الحدّ الأوَّل في المُتواليَّة الهندسيَّة المُؤلفَة من ٨ حدُود، حدُها الأخير يُساوي ٣٨٤ وجِدَاء حدَّيهَا الأوسطَين 1152، ثم أوجِد أساس هذهِ المُتواليَّة.

الحل:

$$a_1 a_8 = a_4\, a_5$$

$$a_1\,(384) = 1152$$

$$a_1 = \frac{1152}{384} = 3$$

نحسُب الأساس كَما يلي:

$$a_8 = a_1 r^7$$

$$384 = 3\,(r^7)$$

$$r^7 = \frac{384}{3}$$

$$r^7 = 128$$

$$r = \sqrt[7]{128}$$

$$r = 2$$

مجموع حدود المتوالية الهندسية

لإيجادِ مجموع حدود المُتوالية الهندسيَّة نميزُ بين:

1– المُتواليَّةُ الهندسيَّة المَحدودة سواءٌ كانت مُتزايدةً أم مُتناقصةً نَستخدِمِ القانون الآتي للمُتواليَّة المُتزايدة:

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

والقانون الآتي للمُتواليَّة المُتناقصَة:

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

مجموع حدود المتوالية الهندسية

المُتوالية الهندسيَّة غير المحدودة المُتناقصة (اللَّانهائية) n= ∞

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

نستخدم القانون الآتي: حيث $r^\infty=0$

ملاحظة

إذا كانت المُتوالية الهندسيَّة مُتزايدة وغير محدودة فإنَّ مجمُوع حُدودِها يُساوي ∞

مجموع حدود المتوالية الهندسية

تطبيق:

لحسابِ مجموع الحُدود السَّبعَة الأولى مِن المُتواليَّة الهندسيَّة الآتية:

$$2 : \ 6 : \ \ldots\ldots\ldots\ldots.$$

الحل:

$$a_1 = 2 \qquad a_2 = 6 \qquad n = 10 \qquad S_7 = ?$$

$$r = \frac{a_2}{a_1}$$

$$r = \frac{6}{2} = 3$$

$$S_n = a_1\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right) \Longrightarrow S_7 = 2\left(\frac{(3)^7-1}{3-1}\right)$$

$$S_7 = 2\left(\frac{2187-1}{2}\right)$$

$$S_7 = 2186$$

مجموع حدود المتوالية الهندسية

تطبيق:

مُتواليَّة هندسيَّة مَجمُوع حُدودَها الثَّلاثة الأولى يُساوي ٦٢ مَجمُوع حُدودَها الثَّاني والثَّالث والرَّابع يُساوي ٣١٠ أوجِد أساس المتُواليَّة وحدُها الأول.

الحل:

$$a_1 \text{ ، } a_2 \text{ ، } a_3 \text{ ، } a_4$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 62$$

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 = 62$$

$$(1 + r + r^2) a_1 = 62$$

$$a_1 = \frac{62}{1 + r + r^2}$$

$$a_2 + a_3 + a_4 = 310$$

$$a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 = 310$$

$$(r + r^2 + r^3) a_1 = 310$$

$$a_1 = \frac{310}{r + r^2 + r^3}$$

$$\frac{310}{r + r^2 + r^3} = \frac{62}{1 + r + r^2}$$

$$(1 + r + r^2)\, 310 = (r + r^2 + r^3)\, 62$$

$$r = \frac{310}{62}$$

$$r = 5$$

$$a_1 = \frac{62}{1 + r + r^2}$$

$$a_1 = \frac{62}{1 + 5 + (5)^2}$$

$$a_1 = \frac{62}{1 + 5 + 25}$$

$$a_1 = \frac{62}{31}$$

$$a_1 = 2$$

مجموع حدود المتوالية الهندسية

تطبيق:

أوجِد مَجمُوع السِتَة حُدود الأولى فِي المُتواليَّة:

$$24 , 12 , \dots\dots\dots\dots..$$

الحل:

$$a_1 = 24 \qquad a_2 = 12 \qquad n = 6 \qquad S_n = 0$$

نُلاحظ أنَّ المُتواليَة مُتناقِصَة ويكُون:

$$r = \frac{a_2}{a_1}$$

$$r = \frac{12}{24} \quad \Rightarrow \; r = 0.5 \quad \Rightarrow 0 < r < 1$$

$$S_n = a_1 \left(\frac{1 - r^n}{1 - r} \right)$$

$$S_6 = 24 \left(\frac{1-(0.5)^6}{1-0.5} \right) \Rightarrow S_6 = 24 \left(\frac{1-0.015625}{0.5} \right)$$

$$S_6 = 48\,(1 - 0.015625) \Rightarrow S_6 = 48\,(0.984375)$$

$$S_6 = 47.25$$

مجموع حدود المتوالية الهندسية

تطبيق:

أوجِد مَجمُوع حُدود المُتواليَّة الهندسيَّة غَير المُنتهيَة الآتية:

$$\mathbf{16\ ,8\ , \dots \dots \dots .}$$

الحل:

$$a_1 = 16 \qquad a_2 = 8 \qquad n = \infty \qquad S_{-\infty} = ?$$

$$r = \frac{8}{16} = 0.5$$

$$S_{-\infty} = \frac{16}{1 - 0.5}$$

$$S_{-\infty} = \frac{16}{0.5}$$

$$S_{-\infty} = 32$$

مجموع حدود المتوالية الهندسية

تطبيق:

لإيجادِ مَجموعِ حُدود في المُتوالية الهندسيَّة الآتية:

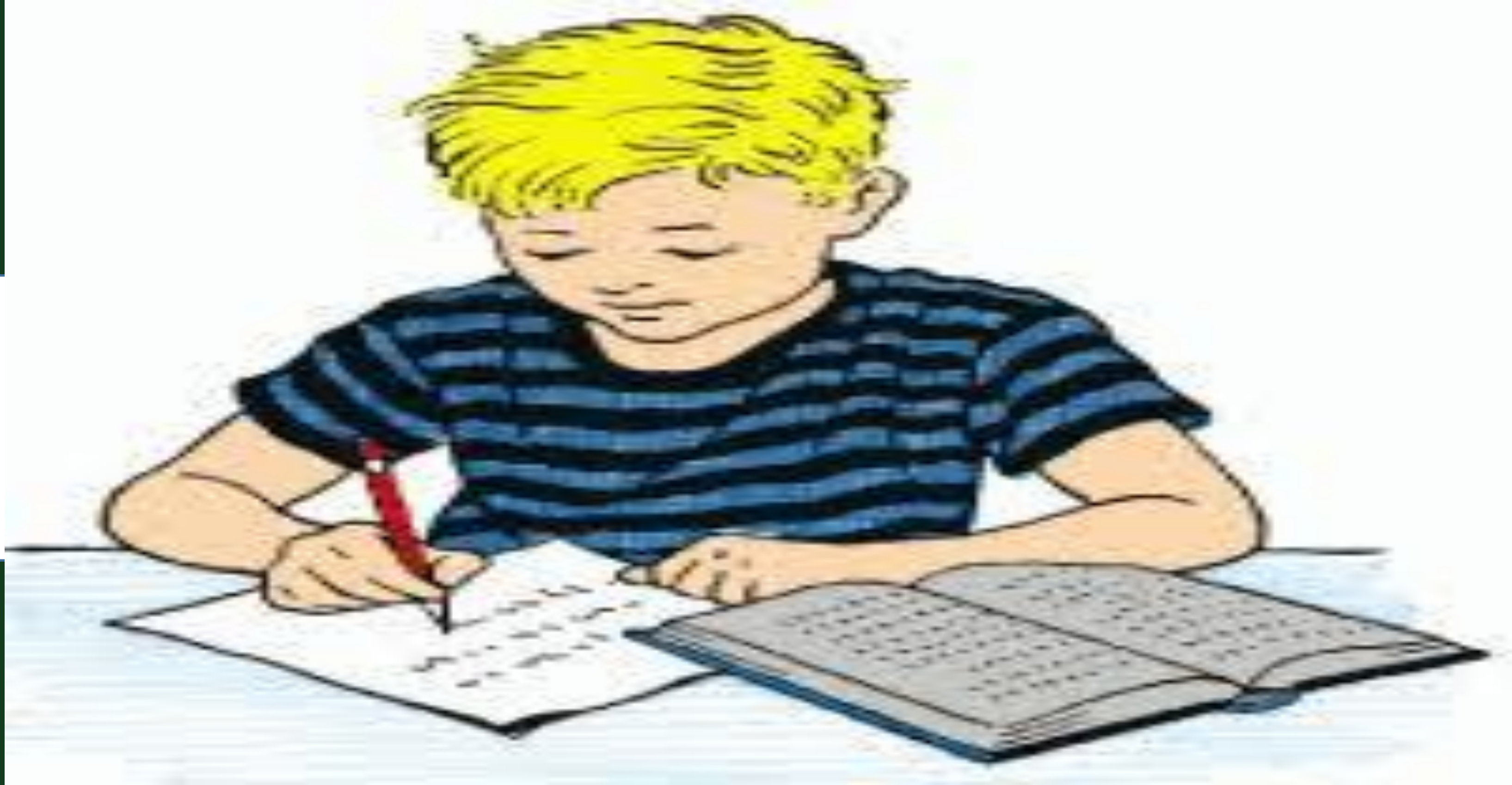
$$- 8 : 2 : \ldots\ldots\ldots\ldots.$$

$$a_1 = 8 \qquad a_2 = 2 \qquad S_\infty = ? \qquad n = \infty$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} \qquad r = \frac{2}{8} \qquad r = \frac{1}{4}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \qquad S_\infty = \frac{8}{1-\frac{1}{4}}$$

$$S_\infty = \frac{8}{\frac{3}{4}} \qquad S_\infty = \frac{32}{3} \qquad S_\infty \approx 10.67$$



انتهى البحث السابع