الرياضيات في العمليات الفندقية

التَحليل التَوافُقي

البحث: الثامن

محتويات الوحدة

- مفهوم التحليل التوافقي

مفهوم التحليل التوافقي

هُوَ عَدد الطَّرائِق والتي يُمكِن مِن خَلالِهَا تَشكِيل مَجمُوعَات جُزئيَة مُختَلِفَة مِن مَجمُوعةٍ أساسيَةٍ تَحوي عَناصِر مُختَلِفَة ثُمَ إيجَاد عَدد هَذهِ المَجمُوعَات الجُزئيَة.

لو اِختَرنَا مِن مَثالنَا السَابق:

البَرنَامِج السِياحِي الأوَّل بـ n1 طَرِيقَة.

والبَرنَامِج السِياحِي الثَّاني بـ n2 طريقة.

والبرنامج السياحي الثَّالِث بـn3 طَرِيقَة.

فَإنَّ عَدد الطُرق التي مِنَ المُمكِن أن يَختارهَا طَارق وخَالد وهَيا يكُون مُساوياً لـ n1*n2*n3

ففي مِثالنَا n1= 3 وتُمَثل خَيارات المَجموعَة الأوَّلي،و n2= 2 وتُمثل خَيارات المَجموعة الثَّانيَة،و n3 =1 وتُمثل خَيارات المَجموعَة الثَالِثَة بذلِك يكُون عَدد الخَيارات فِي المِثَالِ السَابِق هُو 6=1*2*3

مفهوم التحليل التوافقي

التباديل

بفَرض أنَّهُ لدينَا المَجمُوعَة الكُليَة N والمُؤلَفَة مِن n عُنصُر، التَبادِيل هُنَا تَبحَث فِي عَدد الطُرق التي يُمكِن مِن خِلالِها إعادة تَرتِيب العَناصِر n دَاخِل المَجمُوعة N .

مثال: لدينَا المجمُوعَة $N = \{a,b,c\}$ بكَم طَرِيقةٍ نَستطَيع أن نُعيِد تَرتيب هَذهِ العَناصِر دَاخِل هَذهِ المَجمُوعَة؟

لو أعدنَا التَرتيب بشكلٍ يَدوي لوجدنَا مَجمُوعة الخَيارات كمَا يَلي:

$$abc \quad acb \quad bac \quad bca \quad cba \quad cab$$

نَجد أنَّ عَدد الخَيارات (عَدد التَبادِّيل) سِتَة وهِي نَاتِج ضَرب مَا يَلي: 1*2*3

نَستطَيع أن نَستَعيِض عَن الحِسابِ اليَدوي بالقَانونِ الرِيَاضِي التَالي:

$$P_n = A_n^n = n!$$

مفهوم التحليل التوافقي

التباديل

ملاحظة:

إنَّ عَامِلِيّ أيّ عَدد هُو الجِدَاء المُتناقِص لهذَا العَدد فَعَامِلي العَدد 4 هُو:

4! =4* 3*2*1*0! حيث 0! =1

وبالتَالي فإنَّ:

$$P_n = A_n^n = n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots\dots\dots 3 * 2 * 1 * 0!$$

التباديل

تطبيق:

أوجِد تَبادِيل سِتَة عَناصِر.

$$P_6 = A_6^6 = 6! = 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 * 0! = 720$$

التراتيب

هُو عَدد المَجمُوعَات الجُزئيَة المُؤلفَة كُلاً مِنهَا مِن k عُنصُر مِن مَجمُوعَة كُلية N مُؤلفَة مِن n عُنصُر.

نَرمُز للتَراتِيب بـ $\mathbf{A}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{k}}$ حَيثُ:

n هُو عَدد عَناصِر المَجمُوعَة الكُلَّيَة.

k هو عَدد عَناصِر المَجمُوعَة الجُزئِيَة.

ويكُون $\mathbf{A}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{k}} = \mathbf{n}(\mathbf{n}-\mathbf{1})(\boldsymbol{n}-\mathbf{2}) \dots \dots \dots \dots (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})$

التراتيب

تطبيق:

ليَكُون لدَينَا المَجمُوعَة الكُلَّية **N** والمُؤلفَة مِن 5 عَناصِر كمَا يَلي:

N = 1،2،3،4،5

إنَّ عَدد المَجمُوعَات الجُزئيَة المُؤلفَة كُلاً منهَا مِن 3 عَناصِر **(k=3)** والتي يُمكِن تَشكِيلهَا مِن المَجمُوعَة الكُلَّية **N** السَابِقَة هِي:

$$A_5^3 = 5 * 4 * 3 = 60$$

نُلاحِظ أنَّ هُناكَ عَلاقَة أساسيَة تَربُط بَينَ التَبادِّيل والتَراتِّيب هِي :

$$P_n = A_n^n = n! = n(n-1)(n-2) \dots \dots (n-k+1)(n-k) \dots 4 * 3 * 2 * 1 * 0!$$
$$= A_n^k = (n-k)!$$

فَيكُون :

$$P_n = A_n^n = n! = A_n^k * (n-k)!$$

نَجِد أنَّ :

$$A_n^k = \frac{P_n}{(n-k)!} = \frac{A_n^n}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

التراتيب

تطبيق:

ما هُو عَدد تَراتِيب مَجمُوعَة كُلِّية مُؤلفَة مِن سَبعِ عَناصِر مَأخُوذَة أربعَّة فـ أربعَّة؟

الحلُ:

$$k = 4 \qquad n = 7$$

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!}$$

$$A_7^4 = \frac{7 * 6 * 5 * 4 * 3!}{3!}$$

$$A_7^4 = 7 * 6 * 5 * 4 = 840$$

التوافيق

كنا قد ذَكرنَا أن التبادَّيل هِي عَدد الطُرق التي يُمكِن مِن خلالهَا إعَادة تَرتيب العَناصِر دَاخِل المَجمُوعة الكلَّية N وأوردنا مِثال المَجمُوعة الكلَّية {a,b,c}= N وذكرنا أنَّ عناصِر المَجمُوعة Nالمُعَاد ترتيبها هي:

a b c , a c b.....

نُلاحِظ أنَّ عَناصِر المَجمُوعَة N قَد تكررّت كُل مَرة أثنَاء عَمليَة إعادَة الترتّيب.

فَلُو طَلبنَا عَدم تِكرَّار العَناصِر، وأثنَاء إعَادة تَرتيبهَا (أي لا يَهمنَا مَكان العُنصِر دَاخِل المَجمُوعَة إذ ترتيبه فالمُهم أن العنصر قد ظهر وظُهورهُ يكُون لمَرّة واحِدَة فقط) لحَصلنَا عَلى مَا يُسمَّى بالتَوَّافِيق.

فَالتَوَّافِيق هِي المَجمُوعَات التي نَحصَل عليهَا باختِيارِ كُلِ العَناصِر أو جُزء مِن عناصِر مَجمُوعَة كُلَّية **N** دُونَ النَظر لتَرّتِيب هَذهِ العَناصِر.

كَم مُتوافَقة نحصَل عَليهَا مِن تَبادَّيل المَجمُوعَة **N** ؟

نَرمُز **للتوافيق** بـ $\mathbf{C_n^k}$ وهي عَدد المَجمُوعات الجُزئية والتي كُل منهَا تَحوي **k** عُنصُر مَأخُوذَة **k** فـ **k** والمُشَّكلة مَن مَجمُوعَة كُلَّية **N** عَدد عناصرهَا **n**

التوافيق

وبالتالي فإنَّ: $\mathbf{C_n^k}$ هي عَدد التَرَّاتيب مَقسُومَاً عَلى تَبادِّيل $\mathbf{k}$ عُنصُر أيّ $\mathbf{k!}$ ويكُون:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{\mathbf{k!}}$$

و لكن $$A_n^k = \frac{n!}{(\mathbf{n-k})!}$$

إذاً $$C_n^k = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!}$$

وبالتالي $$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(\mathbf{n-k})!}$$

التوافيق

حَيثُ k هِي عَدد عَناصِر المَجمُوعة الجُزئيَة التي يُراد تَشكيلهَا مِن المَجمُوعة n و n عدد عَناصِر المَجمُوعة الكلِّية N.

1- إذَا كَانَت k=0 فإنَّ

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

2- إذَا كَانَت k=0 فإنَّ $C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{1!(n-1)!} = n$

3- أوجِد k = n ثم K = n-k.

التوافيق

تطبيق:

أوجِد تَوَافِيق مَجمُوعَة كُلِّية مُؤلفَة مِن **10** عَناصِر مَأخُوذَة **3** ، **3**.

$$n=10 \qquad k=3$$

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!}$$

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3!\,7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

انتهى البحث الثامن